目　　录

射影几何学

几何基础

射影几何学

第一章　仿射几何学的基本概念

本课程主要研究射影几何，在第一章我们介绍仿射几何的基本概念，作为从欧氏几何过渡到射影几何的桥梁。

1.1　平行射影与仿射对应

我们来考虑同一平面内直线 a 到直线 a' 的平行射影（图 1.1）。设 l 为平面上一直线，与 a 及 a' 都不平行。通过直线 a 上诸点 $A, B, C, D, \cdots$ 作 l 的平行线，交 a' 于 $A', B', C', D', \cdots$，这样便定义了直线 a 到直线 a' 的一个映射，称为平行射影或透视仿射。a 上的点是原象点，a' 上的对应点是映象点，l 是平行射影的方向。记这个透视仿射为 T，则写 $A'=T(A), \cdots$。明显地，平行射影和方向有关，方向变了，就得出另外的透视仿射。

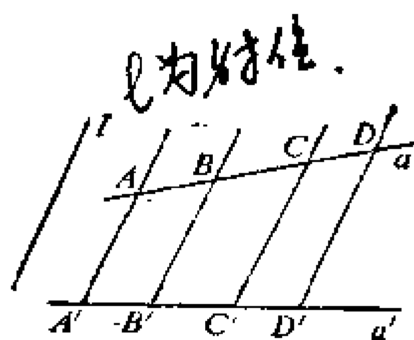


图　1.1

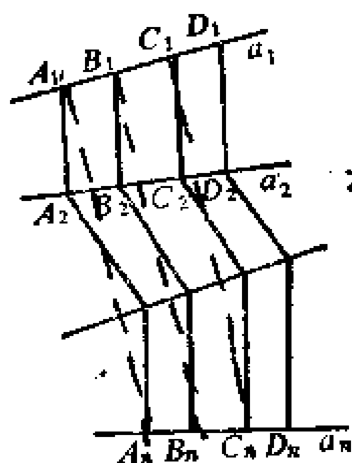


图　1.2

现设同一平面内有 n 条直线 a_1，a_2，…，a_n（图 1.2），用 T_1，

$T_2, \cdots, T_{n-1}$ 顺次表示 a_1 到 a_2, a_2 到 $a_3, \cdots$, a_{n-1} 到 a_n 的透视仿射，经过这一串平行射影，a_1 上的点和 a_n 上的点建立了一个一一对应，称为 a_1 到 a_n 的仿射或仿射变换 T: $T = T_{n-1} \cdots T_2 T_1$. T 称为 $T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}$ 按这个顺序的乘积. $T(A_1) = T_{n-1} \cdots T_2 T_1(A_1) = T_{n-1} \cdots T_2(A_2) = \cdots = A_n$, $T(B_1) = B_n$, 等等. 注意书写的顺序跟平行投影的先后顺序是相反的. 仿射是由有限回的平行射影组成的，所以仿射是透视仿射链或平行射影链. 透视仿射是最简仿射. 要断定一个仿射是否是透视仿射，只要看原象点和映象点的联线是否都平行.

仿此可以定义平面 π 到平面 π' 的平行射影或透视仿射 T, 平行射影的方向 l 要求既不与 π 又不与 π' 平行. 射影方向改变了就得出另外的从 π 到 π' 的透视仿射. 若 $T(A) = A'$, $T(B) = B'$, $T(C) = C'$, 且 A, B, C 共线，则易见 A', B', C' 也共线. 设以 a 表直线 ABC, 以 a' 表直线 $A'B'C'$(图 1.3), 则写 $T(a) = a'$.

所以二平面间的平行射影将一平面上的点映射为第二平面上的点，将一平面上的直线映射为第二平面上的直线. 我们说透视仿射保留同素性(即几何元素点与线保持原先的种类).

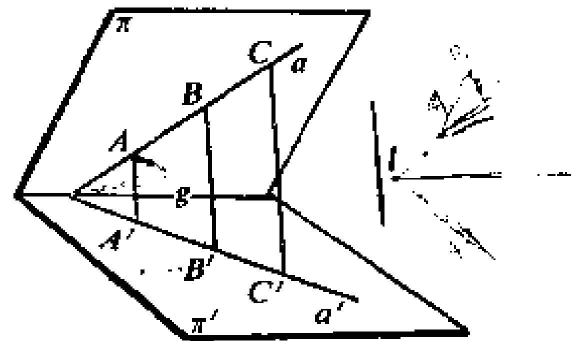


图　1.3

直线与直线间的透视仿射有一个自对应点(如果这两线相交)，即两线的公共点. 同样，在平面到平面的透视仿射下，若两平面相交，则交线 g 为自对应点的轨迹，称为对应轴，对应直线 a 与 a' 或相交于轴上，或都与轴平行. 点在直线上，称为点与直线相接合(或结合或关联). 对于原象，点 A 与直线 a 接合，对于映象，点 A' 与直线 a' 接合，我们说透视仿射保留接合性.

仿照直线到直线的仿射，平面到平面的仿射是由有限回的平

2回　　3回

行射影组成的，或者说，仿射是透视仿射链.

1.2 仿射不变性与不变量

经过一切透视仿射不改变的性质和数量，称为仿射不变性和仿射不变量. 经过仿射变换它们是不改变的. 经过任何仿射变换不改变的图形、性质和数量，称为仿射图形、仿射性和仿射量. 由以上所述可知，同素性、接合性是仿射不变性. 由此推知，仿射变换将共线点映射为共线点，将共点线映射为共点线. 现在证明:

定理1 二直线间的平行性是仿射不变性.

证明 设 a, b 是平面 π 内的两条平行线，a', b' 是它们在平面 π'内的仿射映象，因此只要求证 $a' \parallel b'$.

若 a' 与 b' 不平行而相交于一点 P'(图 1.4)，且设 P 为 P' 的原象点，那末由于仿射保留接合性，点 P 应该既在 a 上又在 b 上，即是说 a 和 b 是相交而不平行了. 所以反证了 $a' \parallel b'$.



图 1.4

系 平行四边形是仿射不变图形.

定义 设 A, B, C 为共线三点，这三点的简比(ABC)定义为下述有向线段的比:

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}.$$

C 在线段 AB 上时，简比$(ABC)<0$，在 AB 的延长线上时，$(ABC)>0$.

在解析几何中讲过线段的定比分割，若点 C 分割线段 AB 的分割比记为 λ，则

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{AC}{-BC}=-(ABC).$$

所以简比 (ABC) 等于点 C 分割线段 AB 的分割比的相反数。

定理 2　共线三点的简比是仿射不变量.

证明　首先注意，对于透视仿射，即对于一回平行射影，这由初等几何是明显的(图 1.1 和 1.3 节)．因此，经过透视仿射链，简比也保持不变.

定理 3　两条平行线段之比是仿射不变量.

证明　可由上述定理推得，设 AB 与 CD 是平面 π 内的平行线段，$A'B'$ 与 $C'D'$ 是它们在平面 π' 内的仿射象 (图 1.5)．由定理 1，$C'D' /\!/ A'B'$.

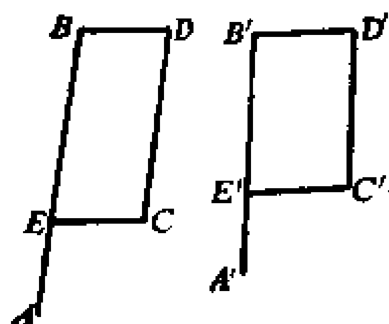


图　1.5

在平面 π 内，过点 C 作 $CE /\!/ DB$ 交 AB 于 E，在平面 π' 内过点 C' 作 $C'E' /\!/ D'B'$ 交 $A'B'$ 于 E'．容易看出 E' 是 E 的仿射象．由定理 2，$(AEB)=(A'E'B')$，即

$$\frac{AB}{EB}=\frac{A'B'}{E'B'},\quad 或\quad \frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

定理 4　一直线上任两线段之比是仿射不变量.

请读者自证.

注意：我们证明了，共线或平行二线段之比经过仿射变换不变，但任意二线段之比在仿射变换下并不保留.

现在我们来证明二图形的面积之比也是仿射不变量．我们先引进下述引理:

引理：在透视仿射下，任何一对对应点到对应轴的距离之比是一个常数.

证明 设 A 与 A'，B 与 B' 是两对透视仿射对应点(图 1.6)，从而 $AA' \parallel BB'$. 由这些点向对应轴作垂线 $AA_0, A'A'_0, BB_0, B'B'_0$；若 AB、$A'B'$ 与轴 g 平行，引理是明显的；设 AB 与 $A'B'$ 相交于轴 g 上一点 X，由相似三角形得

$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{AX}{BX}, \quad \frac{A'A'_0}{B'B'_0}=\frac{A'X}{B'X}.$$

但
$$\frac{AX}{BX}=\frac{A'X}{B'X},$$

故有
$$\frac{AA_0}{BB_0}=\frac{A'A'_0}{B'B'_0},$$

交换比例外项得

$$\frac{A'A'_0}{AA_0}=\frac{B'B'_0}{BB_0}=\text{常数 } k,$$

这常数 k 随给定的透视仿射而定.

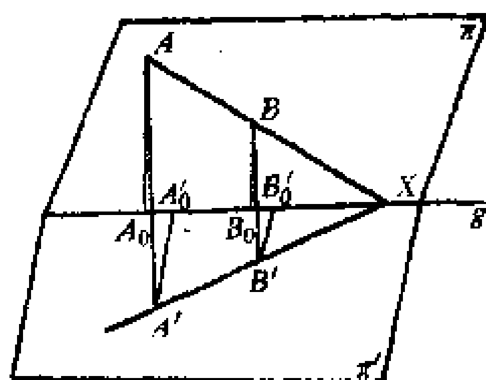


图 1.6

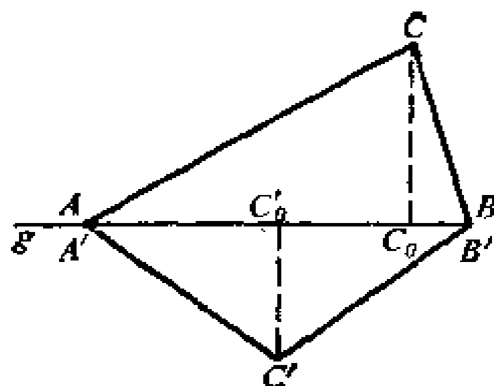


图 1.7

利用这引理，我们证明：

定理 5 在仿射变换下，任何一对对应三角形面积之比等于常数. 换句话说，任意两个三角形面积之比是仿射不变量.

证明 先对透视仿射证明这个定理，再推广到一般仿射. 证

明分为两步.

第一步：设对应三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 有两对对应顶点 A 和 A', B 和 B' 重合在透视仿射对应轴 g 上(图 1.7).

由第三对对应顶点 C 和 C' 在两个三角形各自的平面上向对应轴 g 作垂线 CC_0 和 $C'C_0'$, 则

$$\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{C'C_0'}{CC_0}.$$

由引理，等式右端为一常数 k, 所以 $\triangle A'B'C'=k\triangle ABC$.

第二步：一般情况.

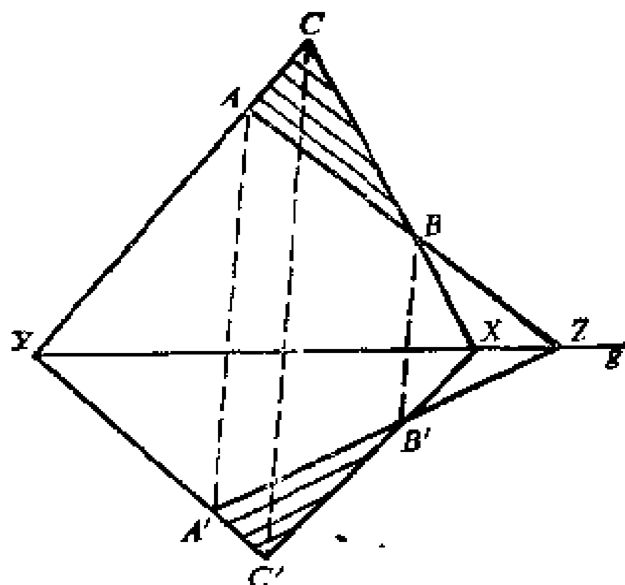


图 1.8

如图 1.8 所示, $\triangle ABC$ 与其透视仿射对应三角形 $\triangle A'B'C'$ 中，三对对应边相交于对应轴 g 上. 由第一步证明得

$$\begin{aligned}\triangle A'B'C'&=\triangle C'YX+\triangle B'XZ-\triangle A'YZ\\&=k\triangle CYX+k\triangle BXZ-k\triangle AYZ\\&=k(\triangle CYX+\triangle BXZ-\triangle AYZ)\\&=k\triangle ABC.\end{aligned}$$

当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有一对对应边例如 AB 和 $A'B'$ 与 g 平行时，点 Z 不存在，但易见定理仍成立.

对于一回平行射影即透视仿射证明了定理，我们进一步对于一般仿射证明这定理.

设平面 π_1 上的三角形 $\triangle_1$ 经过透视仿射 T_1 变换为平面 π_2 上的三角形 $\triangle_2$, $\triangle_2$ 经过透视仿射 T_2 变换为平面 π_3 上的三角形 $\triangle_3$, 以下类推，直至最后变换为平面 π_n 上的三角形 $\triangle_n$. 同样平面 π_1 上的三角形 σ_1 施用同一串透视仿射变换为 π_n 的三角形 σ_n. 设引理中所说的常数顺次为 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$, 于是按已证部分，若置 $k_1k_2\cdots k_{n-1}=k$(常数)，则有

$$\triangle_2=k_1\triangle_1,\ \triangle_3=k_2\triangle_2,\ \cdots,\ \triangle_n=k_{n-1}\triangle_{n-1},$$

从而有 $\triangle_n=k\triangle_1$; 同理有 $\sigma_n=k\sigma_1$.

所以有
$$\frac{\triangle_1}{\sigma_1}=\frac{\triangle_n}{\sigma_n}.$$

系 1 在仿射变换下，任何一对对应多边形面积之比等于常数. 换句话说，任意两个多边形面积之比是仿射不变量.

为了证明，只要把多边形分解成三角形之和.

系 2 在仿射变换下，任意两条封闭凸曲线所围成的面积之比是仿射不变量.

为了证明，用 A 和 A' 表示在仿射变换下一对对应的封闭曲线所围成的面积，S_n 和 S'_n 是这一对封闭曲线的内接 n 边形的面积，它们是相互对应着的. 在 $n\to\infty$ 并且各边趋于零的条件下，

$$A=\lim_{n\to\infty}S_n,\qquad A'=\lim_{n\to\infty}S'_n;$$

但已证

$$S'_n=kS_n,$$

取极限得

$$A'=kA.$$

仿此用 B' 和 B 表示另外一对对应的封闭曲线所围成的面积，则 $B'=kB$. 所以有

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}.$$

1.3 平面到自身的透视仿射

设 T_1 为从平面 π 到 π_1 的透视仿射，射影方向为 l_1；T_2 为从平面 π_1 到 π 的透视仿射，射影方向为 l_2（图 1.9）。T_1 将 π 上一点 A 映射为 π_1 上的点 A_1，$AA_1 /\!/ l_1$；T_2 将 π_1 上的点 A_1 射回为 π 上一点 A'，$A_1A' /\!/ l_2$. 所以透视仿射变换 T_1 和 T_2 的乘积 $T=T_2T_1$ 将 π 上的点 A 变换为本身上的点 A'. 同样，设 $T_1(B)=B_1$，$T_2(B_1)=B'$. 于是仿射变换 T 具有这样的性质，它将 π 上的点变为 π 上的点：$T(A)=A'$，$T(B)=B'$，它还将 π 上的直线 $a=AB$ 变为 π 上的直线 $a'=A'B'$，即是说，T 保留同素性和结合性.

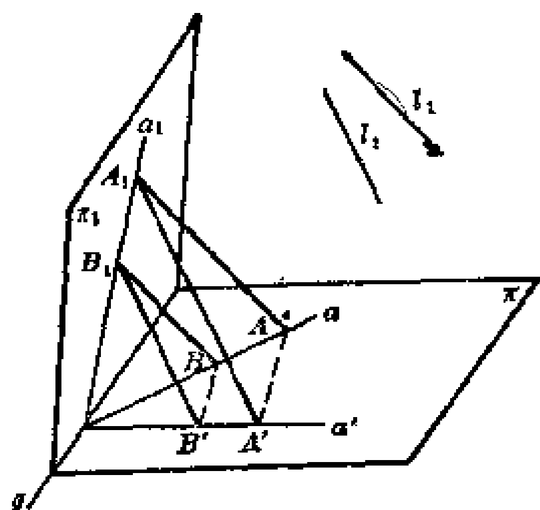


图 1.9

T_1 将 π 上的相交直线 a 和 b 变换为 π_1 上的相交直线 a_1 和 b_1，T_2 把 π_1 上这两相交直线 a_1 和 b_1 变回为 π 上两相交直线 a' 和 b'，因而 T 将 π 上的相交直线 a 和 b 变为 π 自身上的相交直线 a' 和 b'.

同样，T 将 π 上的平行线变为 π 自身上的平行线.

由于 T_1 和 T_2 保留简比，所以 T 保留简比.

由于 $AA_1 /\!/ l_1 /\!/ BB_1$，$A_1A' /\!/ l_2 /\!/ B_1B'$，所以平面 $AA_1A' /\!/$ 平面 BB_1B'. 这两平行平面和 π 的交线 AA' 和 BB' 于是平行，即是说，在变换 T 下，对应点的联线 AA'，BB' 具有固定的方向.

显然 π 和 π_1 的交线 g 上每一点经过 T 不变.

我们称T为平面π到自身的透视仿射. 它将点变为点, 直线变为直线, 保留接合性, 保留平行性, 保留简比, 保留平行线段的比, 保留两图形面积的比, 并且对应点的联线相平行, 还有一条直线g, 它上面的每一点为自对应点.

g称为平面到自身的透视仿射对应轴, AA'给出透视仿射的方向.

一对对应直线或者相交在对应轴上, 或都与对应轴平行.

定理 平面内的透视仿射由对应轴与一对对应点完全决定.

证明 设已知对应轴g与一对对应点A, A'. B为平面上任一已知点, 我们要证明B的透视仿射象B'可以唯一地确定.

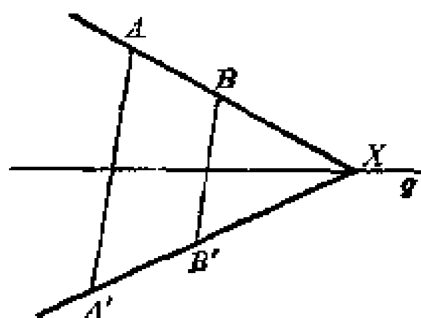


图 1.10

联直线AB, 设与对应轴相交于点X, 联X与A', 则AX与$A'X$是一对对应直线. 过B引AA'的平行线, 与B对应的点B'就只能是这直线与$A'X$的交点, 所以是唯一确定的.

请读者自行考虑, 当$AB /\!/ g$或B在AA'上时, B'如何确定?

1.4 平面内的一般仿射

平面到自身的有限回透视仿射链组成平面内的仿射或仿射变换. 凡平面到平面的仿射所具备的性质, 平面到自身的仿射也具备.

定理 给定平面内的两个三角形, 至多利用三回透视仿射可使一个三角形变为另一三角形.

证明 把$\triangle ABC$(图 1.11)平移到$\triangle A'B_1C_1$使顶点A落在A'上. 我们把平移看作透视仿射的特例, 记作T_1, 因为这时对应轴

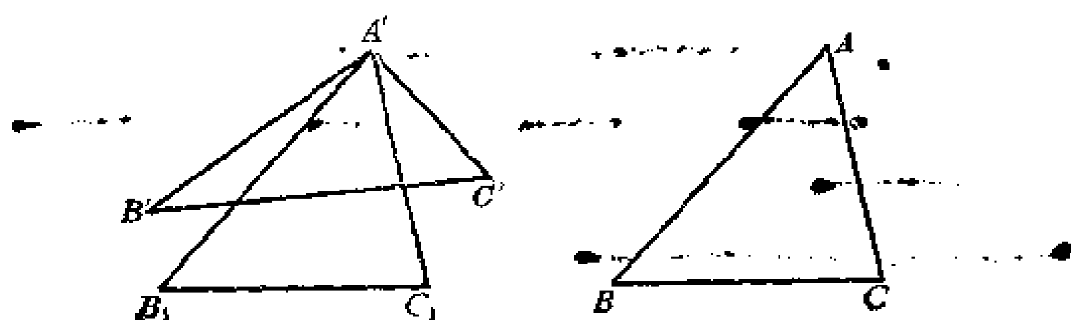


图 1.11

虽不存在(对应边相互平行),但对应顶点的联线是相互平行的. 然后以直线 $A'B_1$ 作为透视仿射对应轴, 以 $C_1\to C'$ 作为一对对应点确定一个透视仿射 T_2. 最后以 $A'C'$ 为对应轴, 以 $B_1\to B'$ 作为一对对应点确定一个透视仿射 T_3. 这样,

$$T_1(ABC)=A'B_1C_1,\qquad T_2(A'B_1C_1)=A'B_1C',$$

$$T_3(A'B_1C')=A'B'C'.$$

置 $T=T_3T_2T_1$, 则 T 为仿射变换, 且 $T(ABC)=A'B'C'$.

如果两三角形有一对顶点重合, 那末利用两回透视仿射就够了, 如果有两对顶点重合, 利用一回透视仿射就够了.

经过仿射变换可以互相转换的图形称为仿射等价的. 所以任两三角形是仿射等价的.

平面仿射几何基本定理　设 P_1, P_2, P_3 是平面内不共线的任意三点; P_1', P_2', P_3' 也是不共线的任意三点. 那末存在一个也只一个仿射变换 T, 使 $T(P_i)=P_i'\ (i=1,2,3)$. 换句话说, 三对对应点(原象不共线, 映象也不共线)决定唯一仿射变换.

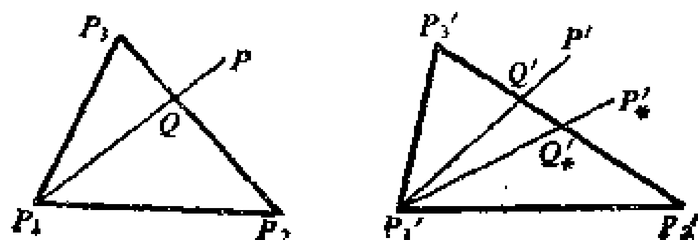


图 1.12

证明 P_1, P_2, P_3 和 P'_1, P'_2, P'_3 各构成一三角形. 由上一定理必有仿射 T 存在使 $T(P_1)=P'_1$, $T(P_2)=P'_2$, $T(P_3)=P'_3$. 这就证明了存在性.

现在假设 T_* 是任一仿射也使 $P_i \to P'_i$ ($i=1,2,3$), 我们来证明 $T_*=T$. 在平面内任取一点 P, 它和 $\triangle P_1P_2P_3$ 某一顶点的联线交对边于一点, 例如图 1.12 上, P_1P 与 P_2P_3 交于点 Q. 设 $T(P)=P'$, $T(Q)=Q'$, $T_*(P)=P'_*$, $T_*(Q)=Q'_*$. 由于 T 和 T_* 都是仿射, 所以都将共线点变为共线点且保留简比. 因而 Q' 和 Q'_* 都在直线 $P'_2P'_3$ 上; 且

(1) $(P_1QP)=(P'_1Q'P')$, $(P_2QP_3)=(P'_2Q'P'_3)$,

(1)* $(P_1QP)=(P'_1Q'_*P'_*)$, $(P_2QP_3)=(P'_2Q'_*P'_3)$.

所以

(2) $(P'_1Q'P')=(P'_1Q'_*P'_*)$, $(P'_2Q'P'_3)=(P'_2Q'_*P'_3)$.

由 (2) 中后一等式推知 $Q'\equiv Q'_*$. 于是前一等式变为 $(P'_1Q'P')=(P'_1Q'P'_*)$, 此式表明 $P'\equiv P'_*$. 换言之, 不论 P 为平面上哪一点, 总有 $T(P)\equiv T_*(P)$, 这就证明了 T_* 与 T 一致. 证完.

这个证明过程事实上向我们指出, 在三对对应点决定的仿射变换下, 一点的仿射象是如何作图的. 同时向我们指出, 平面上有两个四点, 都无三点共线, 那末四点 P_1, P_2, P_3, P 能通过仿射与 P'_1, P'_2, P'_3, P' 对应的充要条件就是(1), 其中 $Q=P_1P\times P_2P_3$, $Q'=P'_1P'\times P'_2P'_3$(符号 $\times$ 表示两个集合的交集, 此地表示求两直线的交点).

1.5 仿射变换的代数表示

我们利用大家熟悉的正交笛氏坐标得出仿射变换的代数表示.

设有一正交笛卡尔坐标系 xOy, 以 E 为单位点(图 1.13). 一

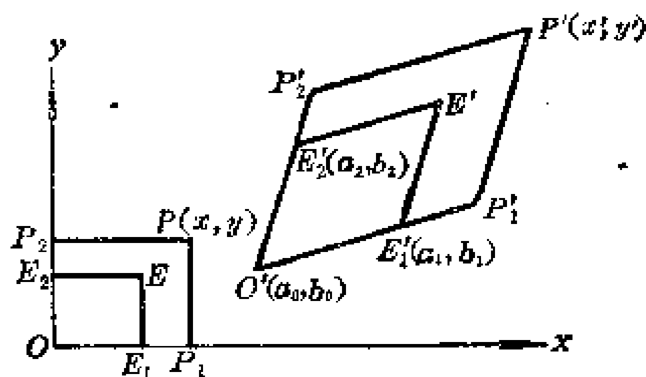


图　1.13

个仿射变换T将平面上一点P变换为一点P'，求P的坐标(x, y)和P'的坐标(x', y')之间的关系.

由上节仿射几何基本定理，仿射变换T由三对对应点唯一确定. 设$T(O)=O'$的坐标为(a_0, b_0), x轴上的单位点$E_1(1, 0)$的映象$T(E_1)=E_1'$的坐标为(a_1, b_1)，y轴上的单位点$E_2(0, 1)$的映象$T(E_2)=E_2'$的坐标为(a_2, b_2). 设P_1，P_2为P在坐标轴上的正射影，且$T(P_1)=P_1'$，$T(P_2)=P_2'$，则T将平行四边形OE_1EE_2及OP_1PP_2分别变换为平行四边形$O'E_1'E'E_2'$及$O'P_1'P'P_2'$.

由于T保留简比，故

$$x=\frac{OP_1}{OE_1}=\frac{O'P_1'}{O'E_1'},\quad y=\frac{OP_2}{OE_2}=\frac{O'P_2'}{O'E_2'}.$$

因此　　$O'P_1'=x\cdot O'E_1'$;　$O'P_2'=y\cdot O'E_2'$.

从而　　$O'P'=x\cdot O'E_1'+y\cdot O'E_2'$.

以坐标表达即得

$$\begin{cases}x'-a_0=x(a_1-a_0)+y(a_2-a_0),\\ y'-b_0=x(b_1-b_0)+y(b_2-b_0),\end{cases}$$

或者写作

$$(1)\qquad \begin{cases}x'=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_0,\\ y'=\beta_1x+\beta_2y+\beta_0,\end{cases}$$

且

$$(2)\qquad \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1-a_0 & a_2-a_0\\ b_1-b_0 & b_2-b_0\end{vmatrix}\neq 0.$$

最后的行列式之所以不为零，是由于不共线三点 O, E_1, E_2 的仿射象 O', E_1', E_2' 不能共线.

这样，平面上的任意仿射变换由形如(1)式的方程所表达，系数满足条件(2). 运动是仿射的特例.

上面取的坐标是正交笛氏坐标，读者试证：第一，对于斜交笛氏坐标系，上面的结论不变；第二，对于仿射坐标系(所谓仿射坐标系，与斜交笛氏坐标系的唯一差别在于两轴的单位长度不相同，因而笛氏坐标是仿射坐标的特例)，上面的结论也不变.

习　题

1.1　举一个例表明两回透视仿射之积仍为透视仿射；举一个例表明两回透视仿射之积不是透视仿射.

求透视仿射之积仍为透视仿射的充要条件.

1.2　两相交平面间的透视仿射有对应轴. 一般仿射在什么条件下有对应轴?

1.3　证明线段的中点是仿射不变性，角的平分线不是仿射不变性.

1.4　两条直线垂直是不是仿射不变性?

1.5　证明三角形的中线和重心是仿射不变性.

1.6　证明梯形在仿射对应下仍为梯形.

1.7　证明两个全等矩形经过仿射变换为两个等积平行四边形.

1.8　经过 $A(-3,2)$ 和 $B(6,1)$ 两点的直线被直线 $x+3y-6=0$ 截于 P 点，求简比 (ABP).

1.9　证明直线 $Ax+By+C=0$ 将两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 的联线段分成的比是 $-\dfrac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}$.

1.10　给定点 A, B，作出点 C 使：(1) $(ABC)=4$；(2) $(ABC)=-\dfrac{3}{4}$；

(3) $(ABC)=-1$.

1.11 证明一直线上二线段之比是仿射不变量.

1.12 证明图形的对称中心是仿射不变性. 图形的对称轴和对称平面是不是仿射不变性?

1.13 给定透视仿射的对应轴 g 和一对对应点 A, A'. 求作:

(1) 已知三角形的对应图形;

(2) 已知正方形的对应图形;

(3) 已知圆的对应图形(作足够多的点).

1.14 给定一个梯形 $ABCD$ 和三角形 $A'B'C'$, 设仿射 T 具有这样的性质: $T(A)=A', T(B)=B', T(C)=C'$. 求作 $T(D)=D'$.

1.15 设透视仿射 T 由对应轴 g 和一对对应点 $A \to A'$ 决定, B 为一已知点, 求作 $T(B), T^2(B), T^3(B)$.

1.16 给定正五边形 $ABCDE$, 已知 A, B, C 的仿射象为 A', B', C', 作求 D 和 E 的仿射象.

1.17 证明在仿射坐标系下, 直线的方程是一次式.

1.18 由代数表示式, 验证仿射几何基本定理: 三对对应点决定一个仿射.

1.19 从仿射变换式验证共线三点的简比是仿射不变量.

1.20 欧氏几何里的圆在仿射变换下变成什么图形?

1.21 利用仿射变换式, 试求在仿射变换下, 三角形的面积是怎样改变的? (从而明确 1.2 节定理 5 所指常数的意义)

1.22 在等腰梯形中, 两底中点, 两对角线交点, 两腰(所在直线)交点, 这四点显然共线(在对称轴上), 试用仿射变换于此图形, 得出什么推广了的命题?

1.23 给定两个仿射变换:

$$T_1: \begin{cases} x'=3x+2, \\ y'=y-3; \end{cases}$$

$$T_2: \begin{cases} x'=x, \\ y'=x+y. \end{cases}$$

求两个乘积 T_2T_1 和 T_1T_2 的表达式, 从所得结果得出结论 $T_1T_2 \neq T_2T_1$, 即变换的乘积, 一般与因子的顺序有关.

1.24 给定椭圆 E 的长轴 AA' 和短轴 BB', 试作出已知直线 l 和 E 的

交点.

1.25　求下述仿射变换的自对应点和自对应直线:

$$\begin{cases}x'=3x-y+4\\ y'=4x-2y\end{cases}$$

1.26　点 A_1, B_1, C_1 分别位于 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上，且 $BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=AC_1:C_1B$，三线 AA_1, BB_1, CC_1 构成 $\triangle A_2B_2C_2$. 求证 $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 有共同的重心.

1.27　三角形的每边分成三等份，将每个分点跟三角形的对顶相联，这六条线构成一个六边形，求证它的三双对顶的联线共点.

1.28　从椭圆 E 外一点 P 引它的切线 PA, PB; A, B 表切点. O 是 E 的中心，射线 OP 交 E 于点 C. 证明面积

$$S_{AOC}=S_{COB},\quad S_{AOP}=S_{POB}.$$

1.29　设 AOA', BOB' 是椭圆的一对共轭直径，证明面积

$$S_{AOB'}=S_{BOA'}.$$

第二章　欧氏平面的拓广

这一章是从中心投影引进平面内的理想元素，由此拓广了欧氏平面，作为建立射影几何的基础.

2.1　中心投影(透视)与理想元素

首先考察同一平面内二直线 l, l' 间的中心投影或透视，透视这一名词来自绘画，17 世纪法国建筑工程师代沙格 (Desargues) 写了一本书叫《用透视表示对象的一般方法》，正标志着射影几何学是在生产实践的基础上发展起来的.

设 l 与 l' 是同一平面内两条不同的直线(图 2.1)，O 是平面内不属于 l, l' 的一点，将O 与 l 上的点 $A, B, \cdots$ 联接，并延长交 l' 于 A'，$B', \cdots$. 那末 l 上的点与 l' 上的对应点一般有一一对应关系. A', B'，…是从 l 到 l' 在以O 为投影中心下 A，$B\cdots$的透视点或中心射影. OA, OB，…是投影线. l 和 l' 的交点是自对应的. 当投影线 $OP \parallel l'$ 时 P 的对应点不存在，P 称为 l 上的没影点. 同理设 Q' 在 l' 上使 $OQ' \parallel l$，则以O 为投影中心从 l' 到 l 的映射，Q' 是没影点.

为了建立两直线上完备的一一对应，我们把术语“两直线平

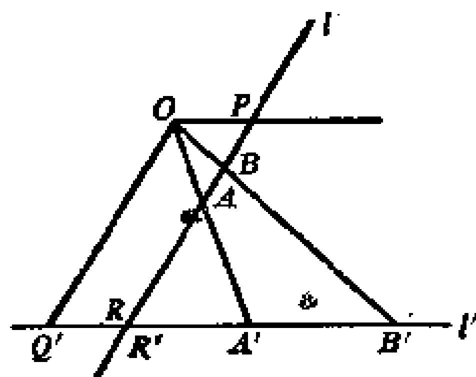


图　2.1

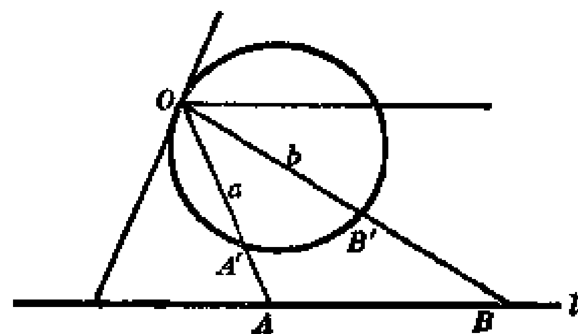


图　2.2

行”用“两直线相交于一个理想点或无穷远点”来代替，从而P的对应点是l'上的无穷远点P'_∞，Q'的对应点是l上的无穷远点Q_∞.

在欧氏直线补充了理想点以后，称为射影直线．设O为射影直线l外一点，则l上的点列和以O为中心（或顶点）的线束之间有一一对应关系（图 2.2）．线束中与l平行的一条对应于l上的无穷远点，由于以O为中心的线束没有边缘直线，我们把射影直线看作是闭合的．例如作一圆通过O点，则l上的点与闭合曲线圆周上的点之间可以建立一一对应（图 2.2），O点本身对应于圆在O点的切线与l的交点．

现在考察从平面到平面的中心投影．设π和π'（图 2.3）为任两平面，g为其交线，O为不属于这两平面的一点．过O引任一直线，依次交两平面于M及M'．O称为投影中心，M和M'互为透视点．这样在两平面上建立了一个透视或中心投影．两平面的点之间，通常有一一对应关系．

这对应关系可扩展到两平面上的直线．平面π上通过M的一直线，与平面π'上通过M'的一直线彼此对应．这互为透视形的两直线，乃是通过O的一平面和平面π，π'的交线$M\mu$，$M'\mu$．通常这两线在g上一点μ相交，当其中一线与g平行时，另一线亦然．

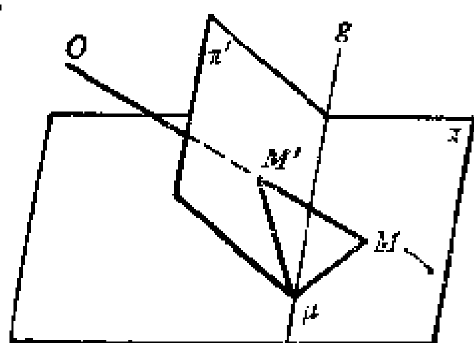


图 2.3

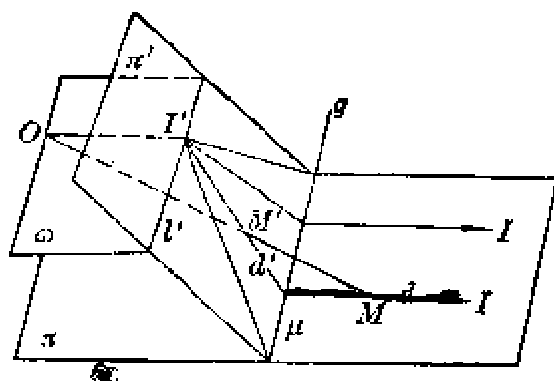


图 2.4

当投影线平行于二平面之一例如π时（图 2.4），以上所述须

加修改．通过 O 作平面 ω 与平面 π 平行，交 π' 于 l'，l' 为与 g 平行的一直线．这线上任一点在 π 上不复有透视点，故即为 π' 面上之一没影点．直线 l' 为 π' 面上没影点的集合，称为 π' 面上的没影线．同样，平面 π 上也有一条没影线．设 I' 为 l' 上任一点，考察平面 π' 上通过 I' 的一束直线 (d')，其在平面 π 上的透视线为一束平行于 OI' 的直线 (d)．令 (d') 上的点 M' 趋向点 I' 移动，则其对应点 M 沿相应的直线 (d) 而无限远离．所以我们把这些平行线 (d) 看作有一个共同的无穷远点 I，并以 I 作为 I' 的对应点．l' 上各点的对应点都在无穷远，其全体自然地视为一直线，称为 π 上的**理想直线或无穷远直线**，而把它作为 l' 的对应线．同样，在 π' 平面上也加一条无穷远线．

从此，平面 π，π' 的点与点，直线与直线之间，有了完备的一一对应关系．共线点对应于共线点，共点线对应于共点线．一组平行线有共同的无穷远点，不同的平行线组有不同的无穷远点．平面上各方向的无穷远点构成该平面上的无穷远线．

在欧氏平面上补充了理想直线以后，该平面便称为**射影平面**．

这样拓广了直线和平面以后，“平行”与“相交”两个原先对立的概念得到统一．在拓广了的平面内，点和直线取得了对等的地位．未经拓广以前，两点恒决定一直线，两直线却未必决定一点，两条平行线并不能决定一点．现在这方面的差别消失了．一点与一方向决定一直线变成两点决定一直线．

引进了无穷远点，平行射影成了中心射影的一个特例．

请注意：——

补充了理想点的直线，补充了理想线的平面，不再是开的，而是闭的．原先的点和线称为**普通（或有限）点和线**．这时有两种观点看待拓广的直线和平面．

如果把理想元素跟普通元素看作没有任何区别，这种观点称为射影观点，相应的平面是射影平面.

如果将新补充的元素异眼看待，给它们保留特殊的身份和名称，这种观点称为仿射观点，相应的平面是仿射平面.

欧氏平面上没有无穷远元素，平行线存在而不相交.

仿射平面上平行线存在，相交于无穷远处.

射影平面上没有无穷远元素，平行线不存在.

2.2 齐 次 坐 标

点和直线的概念已经推广，点和直线的代数表示也就要跟着推广才能适应需要. 拓广直线上有了一个无穷远点，它的坐标 x 应该算作趋于∞，由于∞不是一个数，运用起来不便，我们引进齐次坐标的概念加以克服.

直线上一点M，原先用一个坐标 x 表示的，现在约定用两个坐标(x_1, x_2)来表示，称为齐次坐标，而 x 称为非齐次坐标，两者之间的关系是

$$x=x_1:x_2,\ x_2\neq 0.$$

并且规定对于任何 $\lambda(\neq 0)$, $\lambda(x_1, x_2)=(\lambda x_1, \lambda x_2)$和$(x_1, x_2)$代表直线上同一点. 当 $x_2=0$, $x_1\neq 0$ 时，我们用$(x_1, 0)=x_1(1, 0)$代表直线上的无穷远点. $(0, 0)$不代表任何点.

同样，在平面上我们把非齐次笛氏坐标(x, y)推广为齐次笛氏坐标(x_1, x_2, x_3)，使

$$x=x_1:x_3,\ y=x_2:x_3,\ x_3\neq 0.$$

并且规定对于任何 $\lambda(\neq 0)$, $\lambda(x_1, x_2, x_3)=(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$和$(x_1, x_2, x_3)$代表平面上同一点，并且把$(x_1, x_2, x_3)$其中 $x_3=0$，而 x_1, x_2 不同为零的数组或矢量代表以 x_1, x_2 为方向参数的直线上的无穷远点. $(0, 0, 0)$不代表任何点. $(1, 0, 0)$代表 x 轴上的无穷远点，

(0, 1, 0)代表 y 轴的无穷远点，(0, 0, 1)代表原点.

一点为无穷远点的特征是 $x_3=0$，所以 $x_3=0$ 取作无穷远线的方程. 按射影观点，$x_3=0$ 的点跟其它的点没有区别.

直线 $u_1x+u_2y+u_3=0$ 以齐次坐标表示，成为 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$，它是 x_1, x_2, x_3 的一次齐次式. 圆锥曲线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ 用齐次坐标表示，成为 $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2=0$，它是 x_1, x_2, x_3 的二次齐次式. 这是齐次坐标命名的由来.

斜率为 k 的直线 $y=kx+b$ 的齐次方程是 $x_2=kx_1+bx_3$，和无穷远线 $x_3=0$ 联立求解，得交点的坐标为 $x_1:x_2:x_3=1:k:0$. 所以斜率为 k 的直线上的无穷远点是$(1, k, 0)$.

同样，两直线

a:　$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ (即 $a\cdot x=0$),

b:　$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$ (即 $b\cdot x=0$)

交点的坐标为 $x_1:x_2:x_3=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$,

由此可见，用矢量表示，则直线 a (即 $a\cdot x=0$) 和 b (即 $b\cdot x=0$)交点的坐标为 $x=a\times b$.

以上所讲的是点坐标，下面介绍线坐标.

直线 a: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$，由它的系数(a_1, a_2, a_3)决定，并且$(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)(\lambda\neq 0)$和$(a_1, a_2, a_3)$代表同一直线. 我们把不全为零的三数 u_1, u_2, u_3 称为直线 $u\cdot x=u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 的线坐标，矢量 $\lambda u(\lambda\neq 0)$和矢量 u 代表同一直线，而不论比例因子$\lambda(\neq 0)$为何. 特别，线坐标(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)分别表示 y 轴，x轴和无穷远线.

若 $u_3\neq 0$(即若直线不通过原点)，则称

$$u=\frac{u_1}{u_3},\qquad v=\frac{u_2}{u_3}$$

为直线 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 的非齐次坐标. 所有不通过原点的直线方程可以写作 $ux+vy+1=0$. 通过原点的直线只有齐次坐标，没有非齐次坐标. 就象无穷远线上的点只有齐次坐标，没有非齐次坐标一样.

两点 $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$联线的方程可写为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,$$

即$(a_2b_3-a_3b_2)x_1+(a_3b_1-a_1b_3)x_2+(a_1b_2-a_2b_1)x_3=0$,

其坐标为 $u=a\times b$.

在以点为基本元素的点几何里，点有坐标，直线有方程. 直线看作点移动的轨迹.

在以直线为基本元素的所谓线几何里，直线有坐标，点有方程. 点看作直线转动的包络. 这时把 u_1, u_2, u_3 看作变数，把 x_1, x_2, x_3 看作定数，于是 $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$ 代表以定点$x(x_1, x_2, x_3)$为中心的直线束，我们把它称为点 x 的线方程，例如 $u_1+u_2-u_3=0$ 代表一点，它的坐标是这方程的系数$(1, 1, -1)$. $u_1=0$ 代表点$(1, 0, 0)$，即 x 轴上的无穷远点. $u_2=0$ 代表点$(0, 1, 0)$，即 y 轴上的无穷远点. $u_3=0$ 代表点$(0, 0, 1)$，即坐标原点.

2.3 对偶原理

我们把点和直线称为射影平面上的对偶元素. 点在直线上，或者直线通过点，称为点与直线接合. 一个平面几何命题，如果只涉及到接合关系便称为射影的，这是因为：在一平面 π 上相接合的点与直线，经过中心投影便成为另一平面 π' 上仍相接合的点与直线. 所以射影的命题，经过任何中心射影，仍保持原貌. 射影平面上，只用点线接合表达的全部命题，构成平面射影几何学.

从前两节，拓广了欧氏平面以后，已有大量事实表明射影命题成对地出现，一个命题中将"点"与"直线"互相对调，并将接合关系按通常的了解来叙述，便得出另一个相对应的命题．举例如下：

点几何

1．两点决定一直线．

2．含点坐标的一次方程 $Ax_1+Bx_2+Cx_3=0$ 表示一直线，其坐标为 $u_1=A, u_2=B, u_3=C$．

3．点 a 和 b 所决定的直线，其坐标为 $a\times b$．

4．三点 $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, $c(c_1, c_2, c_3)$ 共线的条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

即 $|abc|=0$ 或矢量 a, b, c 线性相关．也就是说有不全为零的三数 λ, μ, ν 存在使 $\lambda a+\mu b+\nu c=0$．

线几何

1°．两直线决定一点．

2°．含线坐标的一次方程 $Au_1+Bu_2+Cu_3=0$ 表示一点，其坐标为 $x_1=A, x_2=B, x_3=C$．

3°．直线 a 和 b 所决定的点，其坐标为 $a\times b$．

4°．三直线 $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$, $c(c_1, c_2, c_3)$ 共点的条件为

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0,$$

即 $|abc|=0$ 或矢量 a, b, c 线性相关．也就是说有不全为零的三数 λ, μ, ν 存在，使 $\lambda a+\mu b+\nu c=0$．

上面只是举了几个例，其中最后一个用到解析几何初步知识．

以后会见到更多这样成对出现的命题.

互相对应的命题,在将"点"换为"直线","直线"换为"点"后,便可互相推出. 这样的两个命题称为对偶命题. 如果两个命题一致,称为自对偶命题. 例如"三点及其两两联线组成一三点形"与"三线及其两两交点组成一三线形",代表同一事实.

射影几何中,下述对偶原理成立:

平面射影几何对偶原理 关于平面上的元素(点与直线)的每个射影命题,都对应着另一个对偶命题,第二命题由第一命题得来,即将每一元素换为其对偶元素. 如果两个命题之一成立,那末另一命题也成立.

这对偶原理的正确性的证明,属于公理法射影几何的范围,在此地我们不去讲它. 表达互相对偶的两命题的代数过程,是完全一致的,我们暂且这样粗浅地领会它的正确性.

2.4 复元素

在拓广的平面内任何二直线相交于一点,这一事实密切联系于下一代数事实,即二元一次联立方程组有一个公共解.

求直线与二次曲线的交点时,代数上用消元法得出单变数的二次方程. 这方程若有两不等实根,便标志直线与二次曲线相交;有等根时便标志直线切于曲线;无实根即有两个共轭复根时,便标志两者没有公共点.

代数上对无实根的情况引入复数以解决这一矛盾,得到很多方便. 几何上相应地引入复元素,这样在拓广的平面上不仅消灭了有限与无穷的差别(引入齐次坐标),同时兼顾了虚实问题.

以复数为坐标的点或直线,称为复点或复直线. 若两点的坐标互为共轭复数,则称为共轭复点. 共轭复线的定义仿此.

运用非齐次坐标时,坐标为复数,元素就是复的. 运用齐次坐

标时，重要的不是这些坐标本身，而是它们相互的比值，因此当坐标为复数时，仍可表示实的几何元素．例如$(2i, 0, 4i)$和$(2-2i, 0, 4-4i)$表示同一个实点$(1, 0, 2)$．

定理 1　若复点 x 在复直线 u 上，则 x 的共轭复点 $\bar{x}$ 也在 u 的共轭复线 $\bar{u}$ 上．

证明　因为由假设，点 x 与直线 u 接合，即得 $u\cdot x=0$ 或 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$．两端取共轭复数，则 $\overline{u_1x_1}+\overline{u_2x_2}+\overline{u_3x_3}=0$，亦即 $\bar{u}_1\bar{x}_1+\bar{u}_2\bar{x}_2+\bar{u}_3\bar{x}_3=0$．此式表明点 $\bar{x}$ 在直线 $\bar{u}$ 上．

定理 2　一对共轭复点的联线是实直线．

证明　设 a 和 $\bar{a}$ 是一对共轭复点，且其联线为 u．根据定理 1，从 a 在 u 上得出 a 的共轭复点 $\bar{a}$ 在 u 的共轭复线 $\bar{u}$ 上；从 $\bar{a}$ 在 u 上又得出 $\bar{a}$ 的共轭复点即 a 在 $\bar{u}$ 上．可见直线 $\bar{u}$ 即 u．一条复直线与其共轭复直线相重合，必为实直线．事实上，由于这两直线 u 和 $\bar{u}$ 重合，它们的齐次坐标成比例：

$$\frac{u_1}{\bar{u}_1}=\frac{u_2}{\bar{u}_2}=\frac{u_3}{\bar{u}_3},$$

由此推出

$$\frac{u_1}{u_3}=\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_3}=\overline{\left(\frac{u_1}{u_3}\right)},\quad \frac{u_2}{u_3}=\frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_3}=\overline{\left(\frac{u_2}{u_3}\right)}.$$

当一复数等于其共轭复数时，必为实数．可见直线 u 的非齐次坐标 u_1/u_3 和 u_2/u_3 为实数，因而 u 是实线．

系　通过一个复点有一且仅一实直线．

定理 1 自身对偶，读者试叙述并证明定理 2 的对偶定理．

题

2.1　证明中心投影一般不保留共线三点的简比．

2.2　以下面的坐标表示的直线是怎样的直线？

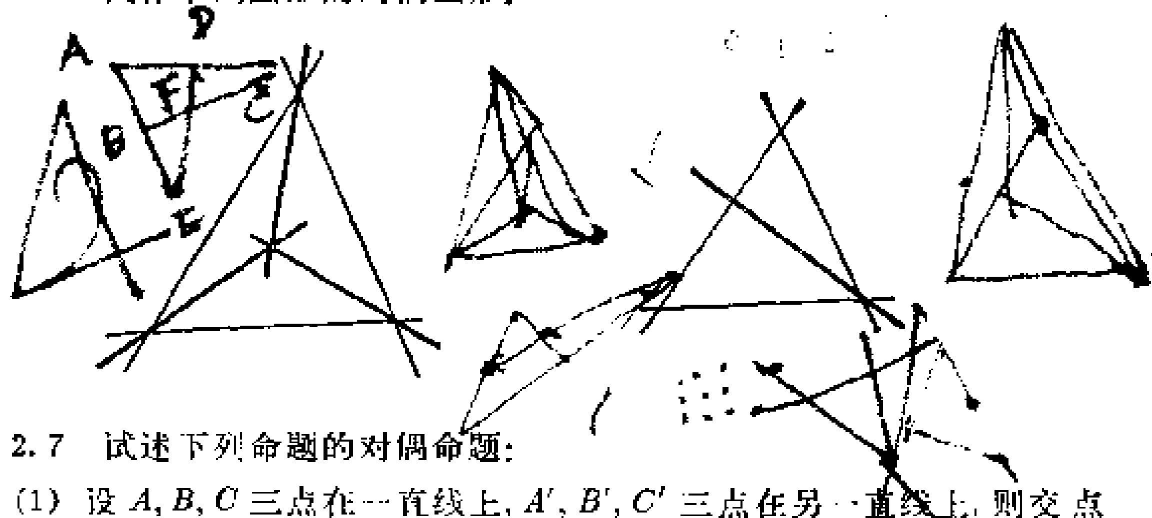
(1) $(1, 1, -1)$，　(2) $(1, -1, 0)$，　(3) $(0, 1, 0)$．

2.3 求联接点(1, 2, −1)与二直线(2, 1, 3), (1, −1, 0)之交点的直线的方程.

2.4 求直线(1, −1, 2)与二点(3, 4, −1), (5, −3, 1)之联线的交点坐标.

2.5 写出原点的方程.

2.6 试作下列图形的对偶图形:



2.7 试述下列命题的对偶命题:

(1) 设 A, B, C 三点在一直线上, A', B', C' 三点在另一直线上, 则交点

$$BC' \times B'C,\ CA' \times C'A,\ AB' \times A'B$$

共线(其中 $BC' \times B'C$ 表示两直线 BC' 和 $B'C$ 的交点, 等等).

(2) 设一个可变动的三角形的两边各通过一定点, 而三顶点始终在共点的三条定直线上, 那末第三边也通过一个定点.

2.8 证明(2, i, 1 − i)与(2 + 2i, 1 − i, 2i)表示一对共轭复点. 并求其联线的方程.

2.9 试证二直线 $(a_1 + ia_2)x_1 + (b_1 + ib_2)x_2 + (c_1 + ic_2)x_3 = 0$ 与 $(a_1 - ia_2)x_1 + (b_1 - ib_2)x_2 + (c_1 - ic_2)x_3 = 0$ (a_i, b_i, c_i 代表实数)的交点是实点.

2.10 求直线(2, i, 3 − 4i)上的实点.

2.11 求通过点(1, i, 0)的实直线.

2.12 方程 $u_1 - u_2 + 2u_3 = 0$ 代表什么? $u_1^2 - u_2^2 = 0$ 代表什么?

2.13 将 $2x - y + 1$ 表示成 $3x + y - 2$, $7x - y$ 的线性组合. 这种表达的几何依据何在?

2.14 将矢量(2, 1, 1)表成两矢量(1, −1, 1)和(1, 0, 0)的线性组合. 这说明什么几何性质?

2.15 求直线 $x - 2y + 3 = 0$ 上无穷远点的坐标.

2.16 (±1, ±1, ±1)各种可能的组合代表平面上几个不同的点? 在正

交笛氏坐标系下画出这些点.

2.17 求无穷远线 $x_3=0$ 与圆 $(x_1-ax_3)^2+(x_2-bx_3)^2=R^2x_3^2$ 的交点, 从而证明平面上的圆恒通过两点 $I(1, i, 0)$ 与 $J(1, -i, 0)$. 反之证明, 实系数的二次曲线若通过这两无穷远共轭复点 I 和 J, 就必然是圆(可能是点圆或虚圆). 因此 I 和 J 称为(虚)圆点.

2.18 下列概念, 哪些是仿射的, 哪些是欧氏的?

(1) 非平行线段的相等; (2) 不垂直的直线;

(3) 四边形; (4) 梯形;

(5) 菱形; (6) 平行移动;

(7) 关于点的对称; (8) 关于直线的对称;

(9) 绕点的旋转; (10) 面积的相等.

第三章　一维射影几何学

本章介绍拓广平面内的一维射影几何学，讨论的对象是一维几何图形，即用一个独立参数描写的几何图形，具体说就是点列和线束，合称平面内的一维基本图形．对于这基本图形引进一个基本的射影不变量，叫做交比．两个同类的基本图形间有所谓"射影对应"的关系．除详细地讨论射影对应的性质及组成外，并介绍一个重要的特例对合对应．

3.1　平面内的一维基本图形：点列和线束

两个矢量 $a(a_1, a_2, a_3)$ 和 $b(b_1, b_2, b_3)$ 表示同一点的充要条件是它们的齐次坐标成比例：

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},$$

即是说这两矢量 a 和 b 线性相关．因此，两个矢量代表相异两点的条件是它们线性无关．

两点 $A(a)$，$B(b)$ 联线上的任一点 $M(x)$ 的齐次坐标 x 可用矢量 a, b 的线性组合表示；因为由解析几何（用非齐次坐标）这直线的方程是

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_3} & \frac{x_2}{x_3} & 1 \\ \frac{a_1}{a_3} & \frac{a_2}{a_3} & 1 \\ \frac{b_1}{b_3} & \frac{b_2}{b_3} & 1 \end{vmatrix}=0,\quad 或\quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,$$

或 $|x\ a\ b|=0$；根据代数知识，必有数量 λ，μ 存在，将 x 表为 a 和 b 的线性组合：

$$x=\lambda a+\mu b.$$

反之，$\lambda a+\mu b$ 代表一点，位于直线 AB 上，因

$$|\lambda a+\mu b\ \ a\ \ b|=\lambda|a\ \ a\ \ b|+\mu|b\ \ a\ \ b|=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0.$$

对偶地，设矢量 a 和 b 表示直线 l 和 m，则此两线重合的条件是 a 和 b 线性相关，相异的条件是 a 和 b 线性无关．并且 $\lambda(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+\mu(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)=0$ 代表一条直线，通过直线 l: $a\cdot x=0$ 和 m: $b\cdot x=0$ 的交点；反之，凡通过这两直线交点的直线可以这样表达．

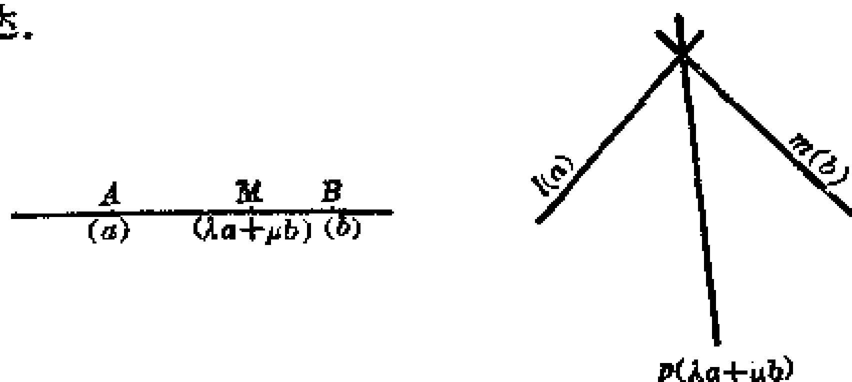


图 3.1

简言之，以 $A(a)$ 和 $B(b)$ 为基点的点列中任一点 M 可表为 M: $x=\lambda a+\mu b$；以 $l(a)$ 和 $m(b)$ 为基线的线束中任一直线 p 可表为 p: $u=\lambda a+\mu b$，其中 λ 和 μ 表示数量（图 3.1）．对于基底元素 a 有 $\lambda=1, \mu=0$；对于基底元素 b 有 $\lambda=0, \mu=1$.

由于现在使用的是齐次坐标，可以不计一个比例因子，若令 $\lambda'=\frac{\mu}{\lambda}$，可知点列或线束可用一个独立参数表示为 $a+\lambda' b$，但要加上这样一条规定，对于基底元素 b，我们取 $\lambda'=\infty$.

3.2 点列的交比

我们来介绍对学习一维射影几何至关重要的一个概念和工具——交比．设 A, B, C, D 为共线四点，我们把 $\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$ 定义为这四

点按这顺序的交比，并以符号(AB, CD)表达：

$$(AB, CD)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC},$$



右端使用的都是有向线段，而非距离．

立刻看出，交比是简比的比：

$$(AB, CD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

定理 1 设取 A 和 B 为基底，将这四点的齐次坐标顺次表达为

$$a, b, a+\lambda_1 b, a+\lambda_2 b,$$

则$(AB, CD)=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

证明 A 点的齐次坐标是(a_1, a_2, a_3)，非齐次坐标是 $x_1=\dfrac{a_1}{a_3}$, $y_1=\dfrac{a_2}{a_3}$；仿此，B 点的非齐次坐标是$x_2=\dfrac{b_1}{b_3}$, $y_2=\dfrac{b_2}{b_3}$； C 点的非齐次坐标是 $x=\dfrac{a_1+\lambda_1 b_1}{a_3+\lambda_1 b_3}$, $y=\dfrac{a_2+\lambda_1 b_2}{a_3+\lambda_1 b_3}$.

我们求C分割线段 AB 的分割比，为此，将 x 的表达式中分子分母同以 a_3 除之，写作

$$x=\frac{\dfrac{a_1}{a_3}+\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3}\dfrac{b_1}{b_3}}{1+\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3}}=\frac{x_1+\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3}x_2}{1+\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3}}.$$

由此可知分割比是$\lambda_1\dfrac{b_3}{a_3}$．由于简比与分割比异号，故

$$(ABC)=-\lambda_1\frac{b_3}{a_3}.$$

同样

$$(ABD)=-\lambda_2\frac{b_3}{a_3}.$$

因此

$$(AB, CD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

证完.

如果共线四点的坐标,由这线上另外两点的坐标所表达,则计算交比的方法由下述定理 2 规定:

定理 2 设点列上四点 A, B, C, D 的齐次坐标是 $p+\mu_i q$, $i=1,2,3,4$, 则

$$(AB, CD)=\frac{(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_4)}{(\mu_1-\mu_4)(\mu_2-\mu_3)}.$$

我们把等式右端的表达式称为四个数 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 顺这次序的交比,记作$(\mu_1\mu_2, \mu_3\mu_4)$,从而点列中四点的交比,等于相应参变数的交比.

证明 置 $r=p+\mu_1 q$, $s=p+\mu_2 q$. 解出矢量 p 和 q, 得 $p=\frac{\mu_2 r-\mu_1 s}{\mu_2-\mu_1}$, $q=\frac{-r+s}{\mu_2-\mu_1}$. 从而得

$$p+\mu_3 q=\frac{\mu_2-\mu_3}{\mu_2-\mu_1}r+\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}s;$$

$$p+\mu_4 q=\frac{\mu_2-\mu_4}{\mu_2-\mu_1}r+\frac{\mu_4-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}s.$$

因此,四点 A, B, C, D 的坐标可写作

$$r,\ s,\ r+\frac{\mu_1-\mu_3}{\mu_3-\mu_2}s,\quad r+\frac{\mu_1-\mu_4}{\mu_4-\mu_2}s.$$

由定理 1 有

$$(AB, CD)=\frac{\dfrac{\mu_1-\mu_3}{\mu_3-\mu_2}}{\dfrac{\mu_1-\mu_4}{\mu_4-\mu_2}}=\frac{(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_4)}{(\mu_1-\mu_4)(\mu_2-\mu_3)}$$

$$=(\mu_1\mu_2, \mu_3\mu_4).$$

证完.

系 设点列上四点 A, B, C, D 的齐次坐标是 $\nu_i p+\mu_i q$, $i=1, 2, 3, 4$, 则

$$(AB, CD)=\begin{vmatrix}\nu_1 & \mu_1\\ \nu_3 & \mu_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\nu_2 & \mu_2\\ \nu_4 & \mu_4\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}\nu_1 & \mu_1\\ \nu_4 & \mu_4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\nu_2 & \mu_2\\ \nu_3 & \mu_3\end{vmatrix}.$$

交比与四点排列的次序有关,四点在一直线上有 $4!=24$ 种排列,相应的 24 个交比并不都是互异的. 事实上, 由交比的表达式容易验证:

定理 3 将某两点互换,同时互换其余两点,则交比值不变.例如

$$(AB, CD)=(BA, DC)=(CD, AB)=(DC, BA).$$

定理 4 只限于一对点之间的交换,则交比值转变为其倒数,即

$$(AB, DC)=\frac{1}{(AB, CD)},\quad (BA, CD)=\frac{1}{(AB, CD)}.$$

定理 5 交换中间两点,则交比值转变为 1 与原值之差:

$$(AC, BD)=1-(AB, CD).$$

我们证明定理 5, 即证 $(AC, BD)+(AB, CD)=1$.

$$(AB, CD)+(AC, BD)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}+\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}$$

$$=\frac{(AD+DC)BD+AB\cdot DC}{AD\cdot BC}$$

$$=\frac{AD\cdot BD-DC(AB+BD)}{AD\cdot BC}$$

$$=\frac{AD\cdot BD+DC\cdot AD}{AD\cdot BC}=\frac{BD+DC}{BC}=\frac{BC}{BC}=1.$$

根据定理 3~5, 24 个交比一般取六个不同的数值:

(1) $(AB, CD)=(BA, DC)=(CD, AB)=(DC, BA)$

$=\alpha$;

(2) $(AB, DC)=(BA, CD)=(CD, BA)=(DC, AB)$

$=\frac{1}{\alpha}$;

(3) $(AC, BD)=(BD, AC)=(CA, DB)=(DB, CA)$

$=1-\alpha$;

(4) $(AC, DB)=(BD, CA)=(CA, BD)=(DB, AC)$

$=\frac{1}{1-\alpha}$;

(5) $(AD, BC)=(BC, AD)=(CB, DA)=(DA, CB)$

$=\frac{\alpha-1}{\alpha}$;

(6) $(AD, CB)=(BC, DA)=(CB, AD)=(DA, BC)$

$=\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

以上六组交比值在一般情况下互不相等，但是在特殊情况下也还可能相等. 要得出可能相等的所有情况，只须考察以 A 作为第一点与其它各点的交比，并且按定理 3～5，逐一令 $\alpha=(AB, CD)$ 与其它五个交比相等. 因为若有(举例说)(4)和(5) 的交比相等: $(AC, DB)=(AD, BC)$，先用定理 4 把它变为 $(AC, BD)=(AD, CB)$，再用定理 5 又变为 $(AB, CD)=(AC, DB)$，也就是说变为交比(1)和交比(4)相等.

逐次令 α 等于其它五个交比，得出:

若 $\alpha=\frac{1}{\alpha}$，则 $\alpha=\pm 1$;

若 $\alpha=1-\alpha$，则 $\alpha=\frac{1}{2}$;

若 $\alpha=\frac{1}{1-\alpha}$，则

$$\alpha^2-\alpha+1=0, \qquad \alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

若 $\alpha=\frac{\alpha-1}{\alpha}$，则

$\alpha^2-\alpha+1=0$ 仍得 $\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$；

若 $\alpha=\frac{\alpha}{\alpha-1}$，则 $\alpha^2-2\alpha=0$，$\alpha=0$ 或 2.

上面五种情况又可归并为以下三种情况：

(a) $\alpha=1$，此时六种交比之值各为 $1, 1, 0, \infty, 0, \infty$；

$\alpha=0$，　　$0, \infty, 1, 1, \infty, 0$；

(b) $\alpha=-1$，　　$-1, -1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$；

$\alpha=\frac{1}{2}$，　　$\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, -1, -1$；

$\alpha=2$，　　$2, \frac{1}{2}, -1, -1, \frac{1}{2}, 2$；

(c) $\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

这时交比为复数，如果我们只限于研究实的点列，这种情况不会发生．因此，只讨论四个实点的交比时，只有在(a)，(b)两种情况下，交比值才不全互异．现在来考察这时的几何特征．

第一种情况，设六个交比值中有一个为 1，例如 $\alpha=1$，则

$$(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_4)=(\mu_1-\mu_4)(\mu_2-\mu_3).$$

化简即

$$(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_4)=0.$$

可见若非点 A 与 B 重合($\mu_1=\mu_2$)，便是 C 与 D 重合($\mu_3=\mu_4$)．

因此，四点中当也只当某两点重合时，六个交比值才能有等于 $1, 0, \infty$ 的．

第二种情况，设六个交比值中有一个为 -1，例如说 $\alpha=-1$，则

$$(AB,CD)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=-1.$$

亦即

$$\frac{AC}{BC}=-\frac{AD}{BD},$$

就是说，C 点分割线段 AB 的值和 D 点分割线段 AB 的值只差一个符号，(因而一个是内分点，另一个是外分点)这时我们说 C，D 两点调和分割线段 AB，或 C 与 D 对于线段 AB 成调和共轭点偶.

可注意，调和分割中，两对点的关系是完全对等的，这意思是说，当 C 与 D 调和分割 AB 时，A 与 B 也调和分割 CD. 因为我们已经知道，若 $(AB,CD)=-1$，便也有 $(CD,AB)=-1$.

总结上面的讨论，得结论如下：如果排除复点的情况和有两点相重的情况不加考虑，那末当也仅当四点适当地配合能成调和共轭时，它们的六个交比才有相同的.

调和分割(调和点列)是交比研究的一个重要特例. 从中学几何我们知道，三角形中一个角的内角和外角平分线，将对边分成两线段的比值，都和两邻边成比例 (注意中学几何讲的是绝对量！)，可见两条平分角线和对边的交点，调和分割对边.

容易证明，一线段被它的中点和这直线上的无穷远点所调和分割.

有关角平分线和线段中点的问题，是中学几何常见的问题. 几何上研究反演，复变函数里研究保圆变换，偏微分方程中研究球的格林(Green)函数，等等，都用到调和分割.

我们给出在初等几何四点成调和点列的条件以结束这一节：

定理 6 设 $(AB,CD)=-1$，O 为 CD 中点，则 $OC^2=OA\cdot OB$.

证明 A,B,C,D 成调和点列的条件可以写作为 $AC\cdot BD+AD\cdot BC=0$. 把所有线段都以 O 点做原点来表达，便得

$$(OC-OA)(OD-OB)+(OD-OA)(OC-OB)=0.$$

乘出，移项，分解因子得

$$2(OA\cdot OB+OC\cdot OD)=(OA+OB)(OC+OD).$$

注意，所用的都是有向线段，利用O为CD中点这一假设，便有$OD=-OC$，从而上式变为

$$2(OA\cdot OB-OC^2)=(OA+OB)\cdot 0=0.$$

证完。

请读者叙述并证明逆命题（习题3.7）。

3.3 线束的交比

设a,b,c,d为一线束中的四条直线（图3.2）。取a和b作为基线，把它们的齐次坐标依次表为a，b，$c=a+\lambda_1 b$，$d=a+\lambda_2 b$。（a和b既代表直线，又代表它们的坐标向量，由上下文，不会引起误会）。

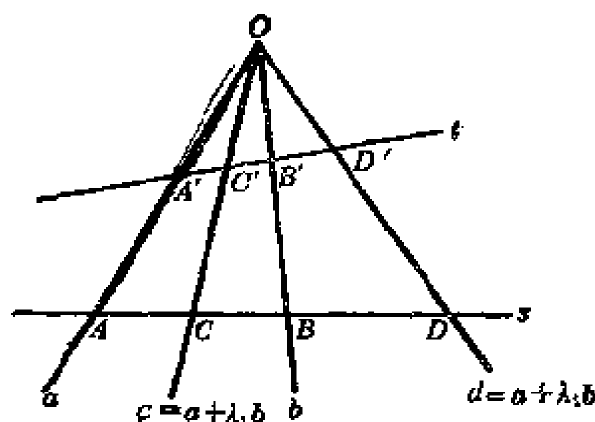


图 3.2

设以一直线s截此四线于点A,B,C,D。由2.3节，这四点的坐标顺次为

$$a\times s,\ \ b\times s,\ \ c\times s=a\times s+\lambda_1(b\times s),$$
$$d\times s=a\times s+\lambda_2(b\times s).$$

所以由3.2节定理1，四点之交比为

$$(AB,CD)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$



$\cdot P_\infty$

值得注意的是：这交比值由线束本身完全决定，与截线 s 无关．换言之，若另以一直线 t 截此四线于点 A', B', C', D'，也有 $(A'B', C'D')=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

我们把一线束中四直线被任一直线（不通过线束中心或顶点 O）所截四点的交比，称为四直线的交比，记为 (ab, cd)．于是有

定理 1　四直线 $a, b, c=a+\lambda_1 b$, $d=a+\lambda_2 b$ 的交比为 $(ab, cd)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

较广泛一些有

定理 2　四直线 $a=p+\mu_1 q, b=p+\mu_2 q, c=p+\mu_3 q, d=p+\mu_4 q$ 之交比为 $(ab, cd)=\frac{(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_4)}{(\mu_1-\mu_4)(\mu_2-\mu_3)}=(\mu_1\mu_2, \mu_3\mu_4)$，即线束中四直线的交比等于其相应参数之交比．

当交比值为 -1 时，四直线称为形成一个调和线束，a 和 b 称为对于 c, d 成一对调和共轭直线，c 和 d 对于 a, b 也是一对调和共轭直线．因此一个角的两边被它的内角和外角平分线调和分割．

注意点列和线束关于交比这一方面的对偶性．

现在我们来显出四直线交比在初等几何的意义．

取线束中心 O 为正交笛氏坐标原点．取一条不与四直线 a, b, c, d 任一条平行的直线作为 y 轴（图 3.3），将四直线的方程写为 $y=k_i x(i=1, 2, 3, 4)$，其中 k_i 为斜率．由于截线可任意选取，取直线 $x=1$ 作为截线，交 a, b, c, d 于 A, B, C, D，交 x 轴于 M．这四

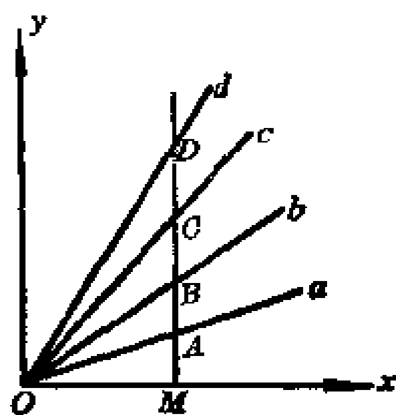


图　3.3

点的纵坐标为 $MA=k_1$, $MB=k_2$, $MC=k_3$, $MD=k_4$, 由上所述,

$$(ab, cd)=(AB, CD)=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}$$

$$=\frac{(MC-MA)(MD-MB)}{(MD-MA)(MC-MB)}$$

$$=\frac{(k_3-k_1)(k_4-k_2)}{(k_4-k_1)(k_3-k_2)}.$$

若以 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 分别表示四直线的倾斜角, 则

$$(ab, cd)=\frac{(\operatorname{tg}\theta_3-\operatorname{tg}\theta_1)(\operatorname{tg}\theta_4-\operatorname{tg}\theta_2)}{(\operatorname{tg}\theta_4-\operatorname{tg}\theta_1)(\operatorname{tg}\theta_3-\operatorname{tg}\theta_2)}.$$

将正切写作正弦和余弦的商, 经过简单的变换得

$$(ab, cd)=\frac{\sin(\theta_3-\theta_1)\sin(\theta_4-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_2)\sin(\theta_4-\theta_1)}$$

$$=\frac{\sin(\widehat{ac})\sin(\widehat{bd})}{\sin(\widehat{ad})\sin(\widehat{bc})}.$$

其中$(\widehat{ac})$表示把直线 a 转到 c (都是赋了向的直线)的有向转角, 其余类推.

3.4 一维射影对应

设有二点列, 动点坐标分别为 $p+\mu q$, $p'+\mu' q'$, 若对应点的参数 μ 与 μ' 满足双一次关系

$$(1)\quad a\mu\mu'+b\mu+c\mu'+d=0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0,$$

(a, b, c, d 表常数) 或

$$(1')\quad \mu'=\frac{-b\mu-d}{a\mu+c}, \quad \begin{vmatrix} -b & -d \\ a & c \end{vmatrix}\neq 0,$$

则称这两点列成射影对应.

设有二线束, 动线坐标分别为 $p+\mu q$, $p'+\mu' q'$, 若对应直线的

参数 μ 与 μ' 满足(1)或(1')，则称这两线束成射影对应.

设有一点列，动点坐标为 $p+\mu q$，又有一线束，动直线坐标为 $p'+\mu'q'$，若对应参数 μ 与 μ' 满足(1)或(1')，则称此点列与线束成射影对应.

点列与线束是一维几何的基本图形. 上面三种情况可以统一表述如下：若两个一维基本图形 A 和 B 的参变数之间，有一个行列式不为零的双一次关系，则称此两图形成射影对应，记为 $A\barwedge B$.

我们把 $\mu'=\dfrac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}\left(\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0\right)$ 称为 μ 的射影函数. 读者试证：

定理 1　若 μ' 是 μ 的射影函数，则 μ 也是 μ' 的射影函数. 若 μ' 是 μ 的射影函数，μ'' 是 μ' 的射影函数，则 μ'' 是 μ 的射影函数. 简言之，射影关系是对称的，是传递的.

现在来研究射影对应的几何特征：

定理 2　设两个一维基本图形成射影对应，则对应四元素的交比相等.

证明　由于我们已知道，四元素的交比，等于其对应参数的交比，可见所求证的是：设 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 为一个一维图形四元素的参数，而 $\mu_1', \mu_2', \mu_3', \mu_4'$ 是另一个一维图形的对应元素的参数，则

$$(\mu_1'\mu_2', \mu_3'\mu_4')=(\mu_1\mu_2, \mu_3\mu_4).$$

我们把 μ 和 μ' 之间的关系写作

$$\mu'=\frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta},\quad \Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0,$$

则

$$\mu_i'=\frac{\alpha\mu_i+\beta}{\gamma\mu_i+\delta}(i=1, 2, 3, 4).$$

于是

$$\mu_i'-\mu_j'=\frac{\alpha\mu_i+\beta}{\gamma\mu_i+\delta}-\frac{\alpha\mu_j+\beta}{\gamma\mu_j+\delta}$$

$$=\frac{\Delta(\mu_i-\mu_j)}{(\gamma\mu_i+\delta)(\gamma\mu_j+\delta)},\quad i,j=1,2,3,4,\ i\neq j,$$

所以

$$(\mu_1'\mu_2',\mu_3'\mu_4')=\frac{(\mu_1'-\mu_3')(\mu_2'-\mu_4')}{(\mu_1'-\mu_4')(\mu_2'-\mu_3')}$$

(经过简单代换) $\dfrac{(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_4)}{(\mu_1-\mu_4)(\mu_2-\mu_3)}=(\mu_1\mu_2,\mu_3\mu_4)$.

定理 3 若两个一维基本图形对应四元素的交比相等，则必成射影对应。

这是定理 2 的逆命题. 设前三对对应元素 μ_1,μ_1'; μ_2,μ_2'; μ_3,μ_3' 是固定的，而第四对是变动的. 由交比相等得 $(\mu_1\mu_2,\ \mu_3\mu)=(\mu_1'\mu_2',\mu_3'\mu')$, 即

$$\frac{(\mu_3-\mu_1)(\mu-\mu_2)}{(\mu_3-\mu_2)(\mu-\mu_1)}=\frac{(\mu_3'-\mu_1')(\mu'-\mu_2')}{(\mu_3'-\mu_2')(\mu'-\mu_1')}.$$

置

$$\lambda=\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3-\mu_2}:\frac{\mu_3'-\mu_1'}{\mu_3'-\mu_2'},$$

则有

$$\frac{\mu'-\mu_2'}{\mu'-\mu_1'}=\lambda\frac{\mu-\mu_2}{\mu-\mu_1}.$$

解出 μ' 得

$$\mu'=\frac{(\lambda\mu_1'-\mu_2')\mu+\mu_1\mu_2'-\lambda\mu_2\mu_1'}{(\lambda-1)\mu+\mu_1-\lambda\mu_2}.$$

即是下面的形式

$$\mu'=\frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta},$$

并且

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda\mu_1'-\mu_2' & \mu_1\mu_2'-\lambda\mu_2\mu_1'\\ \lambda-1 & \mu_1-\lambda\mu_2\end{vmatrix}.$$

将右端拆成四个行列式，显见只含 λ 一次方的项，简单的计算表明：

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\lambda(\mu_1-\mu_2)(\mu_1'-\mu_2').$$

为了使对应有意义，我们自然假设 μ_1, μ_2, μ_3 互不等，μ_1', μ_2', μ_3' 也互不等. 于是

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0.$$

可见对应元素之间有一个行列式不等于零的双一次关系. 根据定义，它们之间的对应关系是射影的.

从定理 2 和 3，两个一维基本图形成射影对应的必要和充分条件是：对应元素的交比相等.

从定理 3 的证明过程，我们还推出一维射影几何的基本定理：

定理 4 〔冯斯套特(Von Staudt)定理〕如果已知两个一维图形中任意给定的三对(各不相重的)对应元素，那末就可以决定唯一的射影对应.

设第一图形三元素的参数为 $\mu_i (i=1,2,3)$(互不相等)，第二图形三元素的对应参数为 μ_i'(互不相等)，那末这个射影对应由下述关系给出：

$$(1)\qquad (\mu_1\mu_2, \mu_3\mu)=(\mu_1'\mu_2', \mu_3'\mu').$$

也可以如下求出：μ 与 μ' 之间的双一次关系写作

$a\mu\mu'+b\mu+c\mu'+d=0$ （a, b, c, d 为待定系数）.

写出三对对应元素满足这关系的条件：

$$(\alpha)\quad \begin{cases}a\mu_1\mu_1'+b\mu_1+c\mu_1'+d=0,\\ a\mu_2\mu_2'+b\mu_2+c\mu_2'+d=0,\\ a\mu_3\mu_3'+b\mu_3+c\mu_3'+d=0.\end{cases}$$

我们所要求的不是 a, b, c, d 四数，只要求其三个相互独立的比值。后面三个条件足以解决这一要求。我们还可以免去这一计算，只要把最后四式看作四元(a, b, c, d)的一次齐次方程组。由于这个方程组应有非零解，所以未知数系数所组成的行列式应为零，即得出联系 μ 和 μ' 的一个关系：

$$(1')\quad \Delta\equiv\begin{vmatrix}\mu\mu' & \mu & \mu' & 1\\ \mu_1\mu'_1 & \mu_1 & \mu'_1 & 1\\ \mu_2\mu'_2 & \mu_2 & \mu'_2 & 1\\ \mu_3\mu'_3 & \mu_3 & \mu'_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

用$(1')$这种形式，比用(1)计算较繁。

***备注 1**　有人会问如何证明方程组(α)的秩是 3 使得a、b、c、d的相互比值是唯一确定的，即如何证明矩阵

$$\begin{bmatrix}\mu_1\mu'_1 & \mu_1 & \mu'_1 & 1\\ \mu_2\mu'_2 & \mu_2 & \mu'_2 & 1\\ \mu_3\mu'_3 & \mu_3 & \mu'_3 & 1\end{bmatrix}$$

的秩是 3？由假设，右上角的 2 阶行列式不为零，所以秩 $r\geqslant2$。若 $r=2$，则必

$$\begin{vmatrix}\mu_1 & \mu'_1 & 1\\ \mu_2 & \mu'_2 & 1\\ \mu_3 & \mu'_3 & 1\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix}\mu_1\mu'_1 & \mu'_1 & 1\\ \mu_2\mu'_2 & \mu'_2 & 1\\ \mu_3\mu'_3 & \mu'_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

由左式，必有数m，n 存在使 $\mu_i=m\mu'_i+n(i=1, 2, 3)$。代入右式得

$$0=\begin{vmatrix}m\mu_1'^2 & \mu'_1 & 1\\ m\mu_2'^2 & \mu'_2 & 1\\ m\mu_3'^2 & \mu'_3 & 1\end{vmatrix}=m(\mu'_1-\mu'_2)(\mu'_2-\mu'_3)(\mu'_1-\mu'_3).$$

但 $m\neq0$，否则 μ_i 将互等了，这跟 μ'_i 互异的假设矛盾，从而反证了 $r=3$。

***备注 2**　有人会问，(1)跟$(1')$ 代表同一个射影对应，能否将$(1')$化为(1)？这需要一点代数技巧。用$(1')$的前两列为展开列按拉普拉斯法展开得

$$(\beta)\quad \Delta=(\mu\mu_1+\mu_2\mu_3)(\mu'-\mu'_1)(\mu'_2-\mu'_3)$$
$$+(\mu\mu_2+\mu_3\mu_1)(\mu'-\mu'_2)(\mu'_3-\mu'_1)$$
$$+(\mu\mu_3+\mu_1\mu_2)(\mu'-\mu'_3)(\mu'_1-\mu'_2)=0.$$

注意我们有恒等式

$$(\gamma)\quad (\mu'-\mu_1')(\mu_2'-\mu_3')+(\mu'-\mu_2')(\mu_3'-\mu_1')+(\mu'-\mu_3')(\mu_1'-\mu_2')=0,$$

这可以这样看出：在(1')中若令 $\mu=\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$，显见 $\Delta=0$，于是从(β)得出(γ)．当然(γ)确是一个恒等式，一展开就看出了．

将(γ)乘以($\mu\mu_1+\mu_2\mu_3$)并从(β)减去，得出

$$(\mu'-\mu_2')(\mu_3'-\mu_1')(\mu\mu_2+\mu_3\mu_1-\mu\mu_1-\mu_2\mu_3)+$$
$$(\mu'-\mu_3')(\mu_1'-\mu_2')(\mu\mu_3+\mu_1\mu_2-\mu\mu_1-\mu_2\mu_3)=0,$$

即 $$(\mu'-\mu_2')(\mu_3'-\mu_1')(\mu-\mu_3)(\mu_2-\mu_1)+$$
$$(\mu'-\mu_3')(\mu_1'-\mu_2')(\mu-\mu_2)(\mu_3-\mu_1)=0,$$

亦即

$$\frac{(\mu-\mu_3)(\mu_1-\mu_2)}{(\mu-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)}=\frac{(\mu'-\mu_3')(\mu_1'-\mu_2')}{(\mu'-\mu_2')(\mu_1'-\mu_3')}.$$

∴ $(\mu\mu_1,\ \mu_3\mu_2)=(\mu'\mu_1',\ \mu_3'\mu_2')$，从而得(1)式．

最后我们提出最常用的一个特例，结束这一节．

假设所考虑的两个一维基本图形都是点列，并且所用的参数就是最常用的笛卡尔坐标 x 和 x'．那末我们知道射影对应式为

$$x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0.$$

为了便于以后推广，我们略微变更一下符号写作

$$(2)\quad x'=\frac{a_{11}x+a_{12}}{a_{21}x+a_{22}},\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

在射影几何里往往使用齐次坐标，以 $x=\frac{x_1}{x_2}$ 和 $x'=\frac{x_1'}{x_2'}$ 代入得

$$\frac{x_1'}{x_2'}=\frac{a_{11}x_1+a_{12}x_2}{a_{21}x_1+a_{22}x_2}.$$

交换比例式两内项，有

$$\frac{x_1'}{a_{11}x_1+a_{12}x_2}=\frac{x_2'}{a_{21}x_1+a_{22}x_2},$$

把这两个公共比值记作$\frac{1}{\rho}$，便得出以齐次笛氏坐标表示的、两个点列之间的射影对应式：

$$(2')\quad \begin{cases}\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\end{cases}\qquad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

3.5 透视对应

在第一章我们把平行射影又叫做透视仿射，把仿射看作透视仿射链．与此相仿，中心射影又称为透视，射影变换(射影对应)可以看作透视链．即是说，任何射影对应，可以用透视作为手段来实现。

由上节射影对应定义，容易证明：

定理 1 设点 s 不在点列 $p+\mu q$ 上，那末这点与点列上任意一点联线，所作成的线束与点列成射影对应。

证明 设点列的基底以矢量 p 和 q 表达，动点以 $p+\mu q$ 表达(图 3.4)．将已知点 s 到这些点联线，这些直线的坐标分别是

$p\times s, q\times s,$

$(p+\mu q)\times s=(p\times s)+\mu(q\times s).$

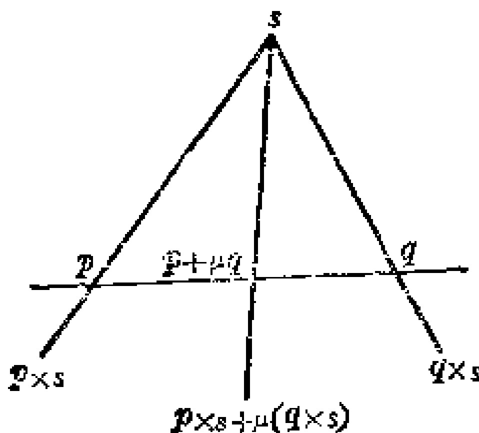


图 3.4

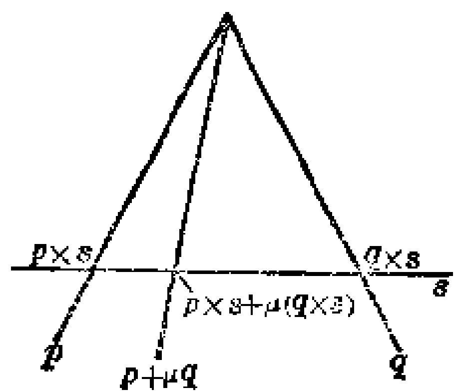


图 3.5

置 $p'=p\times s, q'=q\times s$，可见点列中动点的坐标为 $p+\mu q$，而线束中对应直线的坐标为 $p'+\mu' q'$，参数间的关系为 $\mu'=\mu$．这显然是射影函数

$$\mu'=\frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}, \quad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0$$

的特例：$\alpha=\delta\neq 0, \beta=\gamma=0$，所以点列和线束成射影对应．

读者交换点与直线的地位、点坐标与线坐标的地位，自行证明对偶命题：

定理 1′　设直线 s 不通过线束 $p+\mu q$ 的中心(图 3.5)那末这直线截这线束所得的点列与线束成射影对应。

定义　点列和线束成射影对应，而对应线通过对应点的(即是说对应点在对应线上的)，这种特殊的射影对应称为透视对应．这时两个一维几何形式(点列与线束)称为互成透视状态或处于透视位置。

我们曾用符号 $\overline{\wedge}$ 表示射影对应，现在用符号 $\overline{\overline{\wedge}}$ 表示透视对应．例如点列 $(A, B, C, \cdots)$ 和线束 $(a, b, c, \cdots)$ 成透视，便以符号 $(A, B, C, \cdots)\overline{\overline{\wedge}}(a, b, c, \cdots)$ 表示．

定义　如果两个点列和同一线束成透视对应，则称两个点列成透视对应．几何特征是：两个点列中对应点的联线共点(图 3.6)，此点称为透视心．

如果两个线束和同一点列成透视对应，则称两线束成透视对应．几何特征是：两线束中对应线的交点共线(图 3.7)，这直线称透视轴．

$$(ABCD\cdots)\overline{\overline{\wedge}}(A'B'C'D'\cdots) \qquad (abcd\cdots)\overline{\overline{\wedge}}(a'b'c'd'\cdots)$$

下面两个互相对偶的定理，以后常引用．

定理 2　两个射影点列成透视的充要条件是：两个点列的公共点自对应。

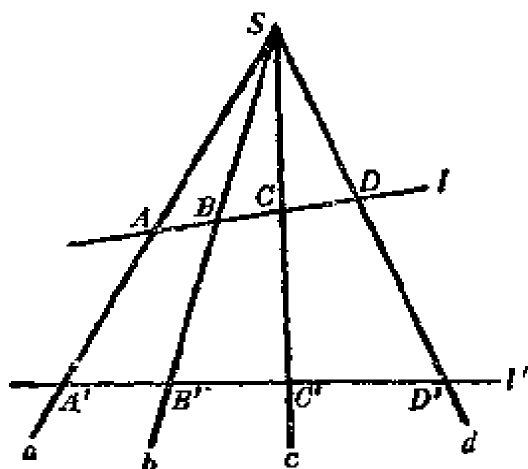


图 3.6

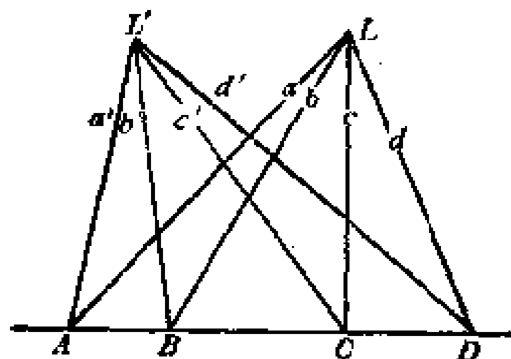


图 3.7

定理 2' 两个射影线束成透视的充要条件是：两个线束的公共线自对应。

我们证定理 2，定理 2' 读者自作练习。

必要条件是显然的。设(图 3.8)直线 l 上点列 $A, B, C, \cdots$ 与直线 l' 上的点列 $A', B', C', \cdots$ 成透视，透视心为 S。设 P 为 l 与 l' 的交点。这一点看作 l 上一点，其在 l' 上的对应点 P' 显然是这一点自身。

反之，设 l 与 l' 上有两个射影点列：

$$(A, B, C, \cdots) \barwedge (A', B', C', \cdots)$$

且 l 与 l' 的交点自对应，即 $P \equiv P'$。我们来证明这两点列实际上成透视，即是说任意一对对应点的联线 MM' 通过一定点。

事实上，联两对对应点 A, A'；B, B' 的直线，设相交于 S，并设 S 与 l 上任意一点 M 的联线交 l' 于 M_1'。于是交比 $(PA, BM) = (P'A', B'M_1')$。由射影对应的假设，又有 $(PA, BM) = (P'A', B'M')$。可见

$$(P'A', B'M_1') = (P'A', B'M'),$$

两端前三点分别相同，交比又相等，从此判断 $M_1' \equiv M'$。可见任意一对对应点的联线 MM' 通过一定点 S。

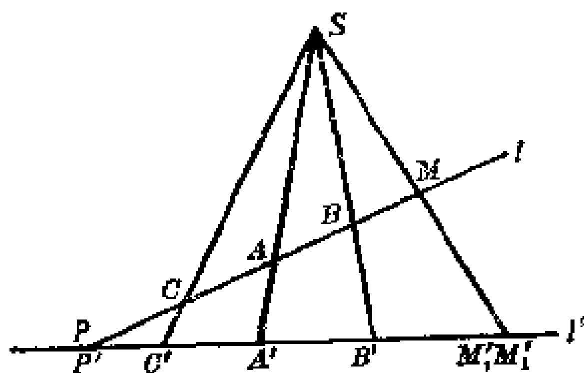


图 3.8

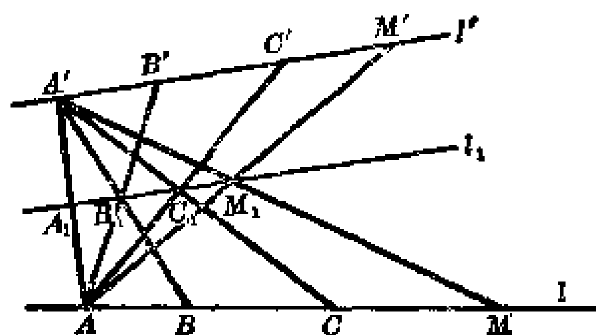


图 3.9

所以两点列确成透视. 证完.

现在来考虑用怎样的几何手段来体现射影对应.

定理 3　对于两个不共底且不成透视的射影对应点列，用两回透视对应就可以使第一点列转换为第二点列. 换言之，这时的射影对应是由两回透视对应组成的.

证明　设 $A, B, C, \cdots$ 是以 l 为底的点列(图 3.9)，$A', B', C', \cdots$ 是以 l' 为底的点列，两者成射影对应:

$$(A, B, C, \cdots)\barwedge(A', B', C', \cdots).$$

联接 A' 与第一点列上诸点，得一与之成射影对应的线束记作 $A'(A, B, C, \cdots)$. 同样联接 A 与第二点列上诸点，得一与之成射影对应的线束 $A(A', B', C', \cdots)$. 根据射影对应的可传性(3.4 节定理 1)，从

$$A'(A, B, C, \cdots)\overline{\barwedge}(A, B, C, \cdots)\barwedge(A', B', C', \cdots)$$
$$\overline{\barwedge}A(A', B', C'\cdots)$$

得出　　　$A'(A, B, C, \cdots)\barwedge A(A', B', C', \cdots)$.

但由于这两线束的公共线 $A'A\equiv AA'$ 是自对应的，由定理 $2'$ 得

$$A'(A, B, C, \cdots)\overline{\barwedge}A(A', B', C', \cdots).$$

由两个线束成透视的定义，则对应线的交点 $B_1=A'B\times AB', C_1=$

$A'C\times AC'$, …应在同一直线 l_1 上. 以 A_1 表直线 AA' 与 l_1 的交点, 便有

$$(A,B,C,\cdots)\overset{A'}{\overline{\wedge}}(A_1,B_1,C_1,\cdots)\overset{A}{\overline{\wedge}}(A',B',C',\cdots),$$

以 A' 和 A 作透视心, 经过两回透视第一点列转换成第二点列. 证完.

这命题告诉我们如何作出一个点的射影对应点. 事实上, 我们从一维射影几何基本定理(3.4 节定理4), 可知在 l 上给定三点 A、B, C, 在 l' 上给定三个对应点 A', B', C', 两个点列的射影对应便完全决定了. 那末怎样作出 l 上任一点 M 的对应点呢? 上面证明告诉我们过程如下:

首先作交点 $B_1=A'B\times AB'$, $C_1=A'C\times AC'$; 其次联 B_1C_1 得直线 l_1; 联 $A'M$ 与 l_1 相交于 M_1; 最后 AM_1 与 l' 交于所求点 M'.

定理 4 设一个点列与一个线束成射影对应而不成透视对应, 那末用三回透视就可以彼此转换。换言之, 这时的射影对应是由三回透视组成.

证明 设以 L 为中心的线束 a, b, c, …与直线 l' 上的一个点列 A', B', C', …成射影对应(图 3.10), 以任一不通过 L 的直线 l 截已知线束, 得出一个和它成透视的点列 A, B, C, …, 这是一回透视. 按定理 3, 再用两回透视就完成了证明:

$$(a,b,c,\cdots)\overline{\wedge}(A,B,C,\cdots)$$
$$\overline{\wedge}(A_1,B_1,C_1,\cdots)$$
$$\overline{\wedge}(A',B',C',\cdots).$$

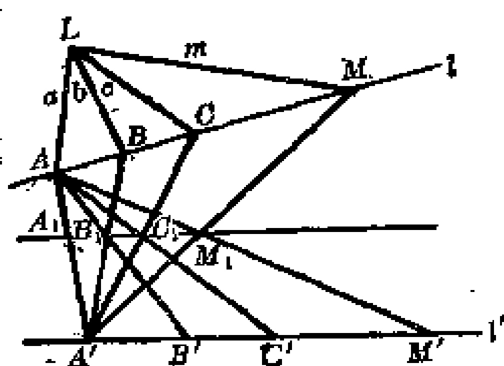


图 3.10

请读者自行考虑两个问题:

(1) 给定两个不同心的成射影对应但不成透视对应的线束,

怎样让它们互相转换？怎样作一线束中一条给定直线的射影对应线？

(2) 设同一直线上给定了两个成射影对应的点列 $A, B, C, \cdots$ 和 $A', B', C', \cdots$，怎样让它们互相转换？怎样作这直线上一点 M 的射影对应点 M'？

例题 已知一直线上三点 A, B, C，求作第四点 D 使交比 (AB, CD) 等于定数 λ.

解 过 C 点任作一直线，在其上任取一点 A'，并在其上作出一点 B' 使有向线段之比 $CA' : CB' = \lambda : 1$（若 $\lambda > 0$，则 A' 与 B' 在 C 的同侧，若 $\lambda < 0$ 则在异侧）. 以 S 表示 AA' 与 BB' 的交点，过 S 作 $A'B'$ 的平行线交 AB 于所求点 D.

要证明作图的正确性，可设直线 $A'B'$ 上的无穷远点为 D'_∞. 于是

$$(A, B, C, D) \overset{S}{\overline{\wedge}} (A', B', C, D'_\infty).$$

从而

$$(AB, CD) = (A'B', CD'_\infty) = \frac{(A'B'C)}{(A'B'D'_\infty)}$$

$$= (A'B'C) = A'C : B'C = \lambda.$$

3.6 对合对应

同底的两个点列，或同心的两个线束，称为重叠的两个一维几何形式. 关于重叠而又成射影对应的两个一维几何形式，有下述定理：

定理 1 重叠而又成射影对应的两个一维几何形式，一般有两个自对应元素（二重元素）

证明 重叠而又成射影对应的两个一维形式中，以 μ 和 μ' 表示一对对应元素的参数. 由 3.4 节，它们之间有一个双一次关系

(1) $a\mu\mu'+b\mu+c\mu'+d=0,\ ad-bc\neq 0.$

所谓自身对应的元素、指的是这样一个数 s 所代表的元素：当 μ 等于 s 时，μ' 也等于 s. 因此，数 s 是下式的根

(2) $as^2+(b+c)s+d=0.$

如果 $a=0, b+c=0, d=0$, 那末这是一个恒等式. 所以 s 可以为任何数，从而每一个元素都是自对应的. 这时射影变换(1)是恒同变换(幺变换). 除开这种情况的话，(2)式是一个二次方程，有两个根 s_1 和 s_2，从而有两个自身对应元素. 当 $a\to 0$ 时，两根之一趋于无穷. 证完.

因方程(2)根的性质不同，我们把射影变换(1)进行分类.

(a) 若自对应元素是两个互异的实元素，这时射影变换叫做**双曲型的**.

(b) 若自对应元素是两个重合的实元素，这时射影变换叫做**抛物型的**.

(c) 若自对应元素是两个共轭复元素，这时射影变换叫做**椭圆型的**.

现在我们进入本节的中心内容：**对合对应**或**对合**.

例如，同一直线上有两个点列，原象点和映象点以 x 和 x' 作为笛氏坐标. 首先考察一个平行移动.

$$T:\quad x'=x+2$$

当 $x=-1$ 时，$x'=1$；当 $x=1$ 时，$x'=3$. 即是说(看图 3.11) $T(A)=A'$, $T(A')=A''$, $A\neq A''$.

再考察一个关于原点的反射：

$$S:\quad x'=-x.$$

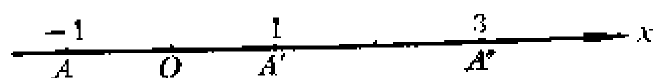


图 3.11

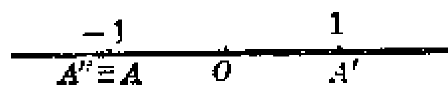


图 3.12

当 $x=-1$ 时，$x'=+1$；当 $x=+1$ 时，$x'=-1$. 即是说（看图 3.12）$S(A)=A'$, $S(A')=A''$, $A\equiv A''$.

T 和 S 都是射影变换，因为它们的代数表达式都是行列式异于零的双一次式. 在变换 T 中，点 A' 有两重身份，把它看作映像点时，A' 的对应点是 A；把它看作原象点时，A' 的对应点是 $A''(\neq A)$.

而在变换 S 中，点 A' 无论看作映象或原象，对应点相同：$A\equiv A''$. 并且不论直线上哪一点 M 都具有这性质，即 M 的映象是 M'，M' 的映象 M'' 又回到 M，或者说直线上的点一对一对地交互对应着。

可见变换 S 就其特性而论与 T 迥然不同. 现在我们来给出对合的定义.

定义 两个重叠而又射影对应的一维几何形式里，有一种特殊的但又是重要的情况，任何元素不论看作属于第一或第二形式，它的对应元素总相一致. 这种非恒同的射影对应 S 称为对合。它的特征是 $S^2=I$, I 表恒同变换.

方才见到，在一直线上对于一点的反射或对称变换，是对合的例. 以一点 O 为中心的两个线束中，幅角为 90° 的旋转，也是一个对合.

对合的性质由下述诸定理描述.

定理 2 在成射影对应的两个重叠的一维几何形式里，只要有一对元素交互对应（假设这两元素不同），那末这射影对应是对合.

证明 设在射影变换

T:　$a\mu\mu'+b\mu+c\mu'+d=0$,　$(ad-bc)\neq 0$

中，μ_0 与 μ_0' 交互对应，即

$$\begin{cases}a\mu_0\mu_0'+b\mu_0+c\mu_0'+d=0,\\ a\mu_0'\mu_0+b\mu_0'+c\mu_0+d=0,\end{cases}$$

两式相减得

$$(b-c)(\mu_0-\mu_0')=0.$$

由于我们假设了 $\mu_0\neq\mu_0'$，所以 $b=c$. 因此变换 T 在现在的条件下可以写作

$$(3)\quad a\mu\mu'+b(\mu+\mu')+d=0\quad (ad-b^2\neq 0).$$

此式对于 μ 和 μ' 是对称的，显见对于任意的 μ，它的对应元素 μ' 的对应元素仍然回到 μ 自身。即 $T(\mu)=\mu'$, $T(\mu')=\mu$。即 μ 与 μ' 交互对应，所以这时 T 确是对合。证完。

系 对合的表达式是(3)

一般的一维射影对应由三对不同的对应元素确定，至于对合这个特例则有：

定理 3 对合由两对不同的对应元素唯一决定。

证明 对合的表达式(3)里，表面上有三个参数 a, b, d，实则只有它们的两个相互比值才是重要的。所以两个条件就足以确定一个对合。

设 $\mu_1\to\mu_1'$, $\mu_2\to\mu_2'$ 是两对对应元素，那末

$$a\mu_1\mu_1'+b(\mu_1+\mu_1')+d=0,$$

$$a\mu_2\mu_2'+b(\mu_2+\mu_2')+d=0.$$

从这两式可解出 $a:b:d$，代入(3)，即得所求变换式。

像过去(3.4 节)一样，只要把(3)和这两式看作 a, b, d 的齐次方程组，就可以缩短计算，立刻得出对合对应式：

$$\begin{vmatrix} \mu\mu' & \mu+\mu' & 1 \\ \mu_1\mu_1' & \mu_1+\mu_1' & 1 \\ \mu_2\mu_2' & \mu_2+\mu_2' & 1 \end{vmatrix}=0.$$

系 三对元素 (μ_1, μ_1'), (μ_2, μ_2'), (μ_3, μ_3') 在同一对合中相对应的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \mu_1\mu_1' & \mu_1+\mu_1' & 1 \\ \mu_2\mu_2' & \mu_2+\mu_2' & 1 \\ \mu_3\mu_3' & \mu_3+\mu_3' & 1 \end{vmatrix}=0.$$

定理 4 对合有两个二重元素，这两个元素是不重合的，可能是共轭复元素，并且这两个二重元素调和分割任意一对对应元素。

证明 由于对合表达式是

$$a\mu\mu'+b(\mu+\mu')+d=0,\ (ad-b^2\neq 0),$$

所以决定二重元素的方程

$$as^2+2bs+d=0$$

不能有等根，所以两根 s_1 和 s_2 或者是不等实根(双曲型对合)，或者是共轭复根(椭圆型对合)。

由于对合是射影变换，因此保留交比，即$(s_1, s_2, \mu\mu')=(s_1s_2, \mu'\mu)$. 利用交比性质，此式可写作

$$(s_1s_2, \mu\mu')=\frac{1}{(s_1s_2, \mu\mu')}\text{或}(s_1s_2, \mu\mu')^2=1.$$

从而$(s_1s_2, \mu\mu')=1$ 或$(s_1s_2, \mu\mu')=-1$. 但$(s_1s_2, \mu\mu')=1$ 将导致 μ 与 μ' 重合，这与对合不是恒同变换的假设抵触. 从而$(s_1s_2, \mu\mu')=-1$. 证完.

定理 5 对合变换式总可以写成下列两种范式之一：

(4) $\mu\mu'=k$ (常数)$\neq 0$;

(5) $\mu+\mu'=0$.

证明 对合变换式(以 λ, λ' 表示对应参数)

$$a\lambda\lambda'+b(\lambda+\lambda')+d=0\quad(ad-b^2\neq 0)$$

中，若 $a\neq 0$，则可写作

$$\lambda\lambda'+\frac{b}{a}(\lambda+\lambda')+\frac{d}{a}=0,$$

或

$$\left(\lambda+\frac{b}{a}\right)\left(\lambda'+\frac{b}{a}\right)=\frac{b^2-ad}{a^2}\equiv k\neq 0.$$

置 $\lambda+\dfrac{b}{a}=\mu$，$\lambda'+\dfrac{b}{a}=\mu'$（这等于改变了参数），便有

$$\mu\mu'=k\neq 0.$$

若 $a=0$，对合表达式变为

$$b(\lambda+\lambda')+d=0.$$

因 $ad-b^2\neq 0$，这时 $b\neq 0$，上式可写作 $\lambda+\lambda'+\dfrac{d}{b}=0$，

或

$$\left(\lambda+\frac{d}{2b}\right)+\left(\lambda'+\frac{d}{2b}\right)=0.$$

置 $$\mu=\lambda+\frac{d}{2b},\quad \mu'=\lambda'+\frac{d}{2b},$$

便有

$$\mu+\mu'=0.$$

证完.

把 μ 看作直线上点的笛氏坐标〔取无穷远点和原点作为基底，任意一点的齐次坐标可表为 $(0,1)+x(1,0)=(x,1)$，非齐次坐标即 x〕，我们来解释(4)式，可以得到：

对合的初等几何表示：

设有通过两点 G 和 H 的圆系，以一直线 l 截之，得交点 $A,A';B,B';C,C';\cdots$（图 3.13）. 以 O 表示直线 GH 和 l 的交点，那末

$$\begin{aligned}OA\cdot OA'&=OB\cdot OB'=OC\cdot OC'=\cdots\\&=OG\cdot OH.\end{aligned}$$

所以 $A,A';B,B';C,C';\cdots$ 在一个对合中相互对应.

如果直线 l 和线段 GH 的延长线相交（图 3.13），$k=OG\cdot OH>0$. 对合是双曲型的. 要得到它的两个二重点，由初等几何可通

过G和H作两圆使与 l 相切，切点E和F即所求二重点（自对应点）.

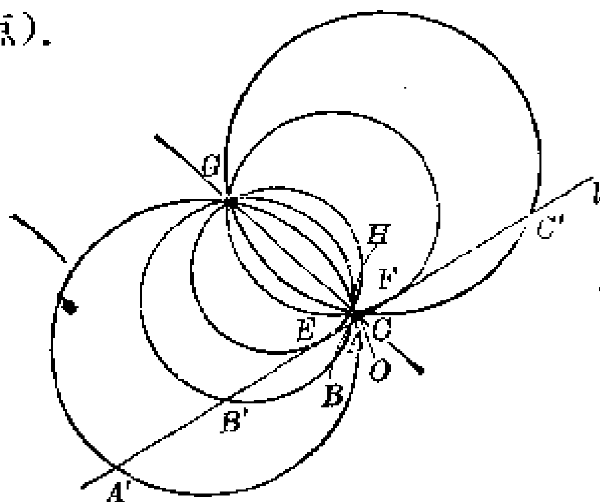


图 3.13

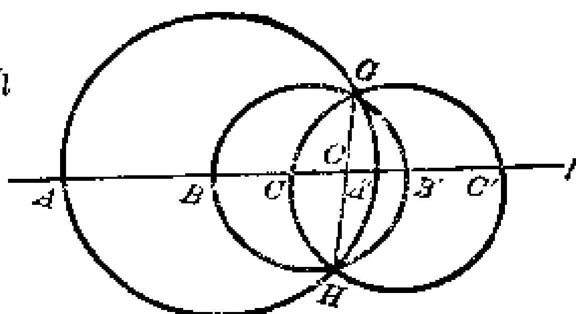


图 3.14

读者可以注意，由 $OA\cdot OA'=OE^2=OF^2$，应用 3.2 节定理 6 的逆定理，得出$(AA',EF)=-1$. 仿此，得$(BB',EF)=-1$. $(CC',EF)=-1,\cdots$. 即是说，对合的二重点E和F调和分割每一对对应点（定理 4 这时得到几何证实）.

如果直线 l 和线段 GH 本身相交（图 3.14），$k=OG\cdot OH<0$，对合是椭圆型的，两个二重点是共轭复点，不能作出.

由定理 3，我们知道对合由两对对应点决定. 设给定两对对应点 $A,A';B,B'$，怎样作出任一已知点C的对合对应点呢？通过 A,A' 任作一圆，通过 B,B' 任作一个圆使与第一圆相交，以 G,H 表交点，最后通过 C,G,H 三点作圆，与已知线相交便得出C的对应点C'.

若线段 AA' 和 BB' 或是一个在另一个内部，或是一个在另一个外部，则对合是双曲型的，要得到二重点 E,F，只要以O为中心，以O到一圆的切线长为半径作圆与 l 相交即得. 若线段 AA' 和 BB' 互相穿插，则对合为椭圆型的.

习 题

3.1 设 A,B,C,D,E 为直线上五点，证明

$$(AB,CD)\cdot(AB,DE)\cdot(AB,EC)=1.$$

3.2　证明一线段中点是这直线上无穷远点的调和共轭点.

3.3　直线上顺次有四点 A,B,C,D，相邻两点距离相等，计算这四点形成交比的各值.

3.4　求四点 $(2,1,-1)$，$(1,-1,1)$，$(1,0,0)$，$(1,5,-5)$ 顺这次序的交比.

3.5　若 $(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\lambda_4)=-1$，证明

$$\frac{2}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_3-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}.$$

一般情况，若 $(\lambda_1\lambda_2,\lambda_3\lambda_4)=k$，则

$$\frac{1-k}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_4-\lambda_1}-\frac{k}{\lambda_3-\lambda_1}.$$

3.6　设 P_1,P_2,P_4 三点的坐标为 $(1,1,1)$，$(1,-1,1)$，$(1,0,1)$，且 $(P_1P_2,P_3P_4)=2$．求点 P_3 的坐标.

3.7　设 A,B,C,D 为共线四点，O 为 CD 中点，且 $OC^2=OA\cdot OB$，证明 $(AB,CD)=-1$.

3.8　设 A,B,C,D 成调和点列：$(AB,CD)=-1$，求证 $\frac{1}{CD}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{CA}+\frac{1}{CB}\right)$．（代数上称 CD 是 CA 和 CB 的调和中项）.

3.9　证明在 x 轴上由方程 $a_{11}x^2+2a_{12}x+a_{22}=0$ 和 $b_{11}x^2+2b_{12}x+b_{22}=0$ 之根所决定的两个点偶成调和分割的充要条件是 $a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}=0$.

3.10　试证四直线 $2x-y+1=0$，$3x+y-2=0$，$7x-y=0$，$5x-1=0$ 共点，并顺这次序求其交比.

3.11　试证：一角的两边和它的内外角平分线成调和线束.

3.12　$ABCD$ 为平行四边形，过 A 引 AE 与对角线 BD 平行，证明 $A(BD,CE)=-1$.

3.13　AB 为圆之直径，C 为直径延长线上一点，从 C 向圆引切线 CT，证明 T 在 AB 上的垂直射影 D 是 C 对于 A,B 的调和共轭点（习题 3.7），若 C 在线段 AB 本身上，如何作它的调和共轭点?

3.14．射影直线上互异的四点 A,B,C,D 若有 $(AB,CD)<0$，则称 A,B 这一对点分隔 C,D 这一对．若 $(AB,CD)>0$ 则称 A,B 不分隔 C,D．证明

(1)分隔性不因射影变换而变.(2) 若 A, B 分隔 C, D 则 A, B 分隔 D, C, 且 C, D 分隔 A, B. (3) 若 A, B 分隔 C, D, 则 A, C 不分隔 B, D; A, D 不分隔 B, C. (4) 这四点正好只有一种配对法使其成为这一对分隔那一对.

3.15 设两点列同底. 求一射影对应使 $0, 1, \infty$ 分别变为 $1, \infty, 0$.

3.16 设点列上以数 x 为笛氏坐标的点叫做点 x, 试求一射影对应, 使点列 l 上的三点 1, 2, 3 对应于点列 l' 上三点:

(1) 4, 3, 2; (2) 1, 2, 3; (3) $-1, -2, -3$.

3.17 当射影对应使一点列上的无穷远点对应于另一点列上的无穷远点时, 证明两点列的对应线段成定比.

3.18 圆周上的点和其上二定点相联得两个线束, 如果把两线束中交于圆周上的两线叫做对应直线, 证明这样的对应是射影的.

3.19 从原点向圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 作切线 t_1, t_2. 试求 x 轴, y 轴, t_1, t_2 顺这次序的交比(设 t_1 是邻近 x 轴的切线).

3.20 设点 $A(3, 1, 2)$, $B(3, -1, 0)$ 的联线与圆 $x^2+y^2-5x-7y+6=0$ 相交于两点 C 和 D, 求交点 C, D 及交比 (AB, CD).

3.21 一圆切于 x 轴和 y 轴, 圆的动切线 m 交两轴于 M 及 M', 试证 $\{M\}$ $\barwedge\{M'\}$.

3.22 用几回透视可使 $(A, B, C)\barwedge(B, A, C)$?

3.23 x 表直线上笛氏坐标, 这直线上的射影变换 $x'=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, 在什么条件下以无穷远点作为二重点?

3.24 试作两个成透视的线束里互相垂直的对应线, 并加讨论.

3.25 设 $(AB, CD)=-\dfrac{1}{3}$, B 是线段 AD 偏 A 的三等分点. 试作 C 点.

3.26 设两个重叠一维射影几何形式有两个二重元素 s_1, s_2. 证明它们之间的对应式可以写作 $\dfrac{\mu'-s_1}{\mu'-s_2}=k\dfrac{\mu-s_1}{\mu-s_2}$, k 是个常数.

3.27 设 s_1, s_2 是对合对应的二重元素, 证明这对合可以写作

$$\frac{\mu'-s_1}{\mu'-s_2}+\frac{\mu-s_1}{\mu-s_2}=0.$$

3.28 一直线上点的射影变换是 $x'=\dfrac{3x+2}{x+4}$, 证明这线上有两点保持不变, 且这两点跟任意一对对应点的交比为常数.

3.29　证明 $\mu\mu'=1$ 是一个对合，且 $(1,-1,\mu,\mu')=-1$．若 μ、μ' 表示一对对应点的笛氏坐标，如何作一已知点的对应点？

3.30　证明 $\mu\mu'=-1$ 是一个对合，且 $(i,-i,\mu,\mu')=-1$．若 μ、μ' 表示一对对应直线的斜率，如何作已知直线的对应直线？

3.31　已知 A_1、A_2，B_1，B_2 为一直线上的四点，求作两点 C_1、C_2 使 $(A_1A_2, C_1C_2)=-1$，$(B_1B_2, C_1C_2)=-1$．

3.32　试证：对合对应的二线束中，一般只有一对互垂的对应直线．若有两对互垂的对应直线，则每对对应直线都互垂．

3.33　设 $A, A'; B, B'; C, C'$ 是对合的三对对应点，试证

$$(ABC')\cdot(BCA')\cdot(CAB')=1.$$

3.34　设 $A, A'; B, B'; C, C'$ 是对合的三对对应点，K 是这直线上此外任一点．证明

$$(BC, A'K)\cdot(CA, B'K)\cdot(AB, C'K)=1.$$

3.35　AB 是定圆的定直径．作一组圆使其中心都在直线 AB 上，并且都跟这定圆正交，证明这组圆跟直线 AB 的交点构成一个双曲型对合．

3.36　O 是笛氏正交坐标系的原点，A 是 y 轴上一定点．以 A 为顶点的直角绕 A 旋转，证明这直角两边被 x 轴所截的点偶构成一个椭圆型对合．

第四章　代沙格定理、四点形与四线形

从本章起我们介绍二维射影几何即平面上的射影几何，首先讲代沙格三角形定理，其次是有关完全四点形与完全四线形的重要调和性质，最后讲巴卜斯 (Pappus) 定理.

4.1　代沙格三角形定理

平面内不共线三点与其中每两点的联线所构成的图形称为三点形.

平面内不共点的三直线与其中每两线的交点所构成的图形称三线形.

这两个图形都由三点和三直线组成，前者称为顶点，后者称为边. 这两图形是自身对偶的，即三角形.

代沙格(Desargues)定理　两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中，若对应顶点的联线 AA', BB', CC' 共点，则对应边的交点 $P=BC\times B'C'$, $Q=CA\times C'A'$, $R=AB\times A'B'$ 共线.

证明　我们以 A, B, C, A', B', C' 既表示点，又表示这些点的

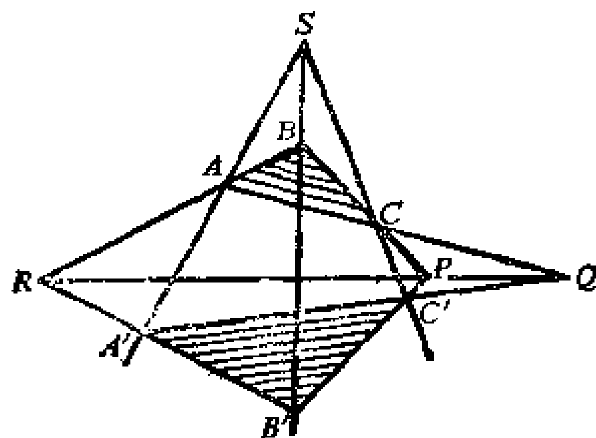


图　4.1

坐标矢量．设三直线 AA', BB', CC' 的公共点为 S(图 4.1)．由于三点 A, A', S 共线，所以 S 点的坐标矢量 S 一定可表为 A 和 A' 的线性组合：

$$S=\alpha A+\alpha' A',\ (\alpha,\alpha' \text{ 表组合系数.})$$

同样有

$$S=\beta B+\beta' B',$$
$$S=\gamma C+\gamma' C'.$$

比较这三式，得

$$R=\alpha A-\beta B=-(\alpha' A'-\beta' B'),$$
$$P=\beta B-\gamma C=-(\beta' B'-\gamma' C'),$$
$$Q=\gamma C-\alpha A=-(\gamma' C'-\alpha' A').$$

第一式 $\alpha A-\beta B=\beta' B'-\alpha' A'$ 由左端观之，知道它代表两点 A 和 B 联线上的一点；由右端观之，知道它代表两点 A' 和 B' 联线上的一点；所以它代表直线 AB 和 $A'B'$ 的交点 R．其余类推．

由于三点 P, Q, R 的坐标矢量间有明显的线性相关式：

$$P+Q+R=0,$$

所以三点 P, Q, R 共一直线．证完．

此证法既适用于两三角形共面的场合，也适用于不共面的场合．

对偶定理 设两个三角形中三双对应边的交点共线，则三双对应顶点的联线共点．

这对偶定理恰好也是逆定理．

读者试以对偶方法自行作图，设坐标，加以证明．

例题 在平面上给定二直线 a 和 b 及不在 a, b 上的一点 P，试问不先定出 a 和 b 的交点，如何用直尺作一直线联接 P 和这交点？

解 任 a, b 二直线外任取一点 O(图 4.2)．通过 O 引三直线

l, m, n. 设$Q = l\times a, R = l\times b, Q' = n\times a$, $R' = n\times b, O_1 = m\times PQ$, $O_2 = m\times PR, P' = O_1Q'\times O_2R'$. 那末 PP' 就是所求直线.

因$\triangle PQR$ 和$\triangle P'Q'R'$ 中, 对应边的交点 O, O_1, O_2 共线, 所以 PP', QQ', RR' 必共点, 亦即 PP' 必通过 a 和 b 的交点.

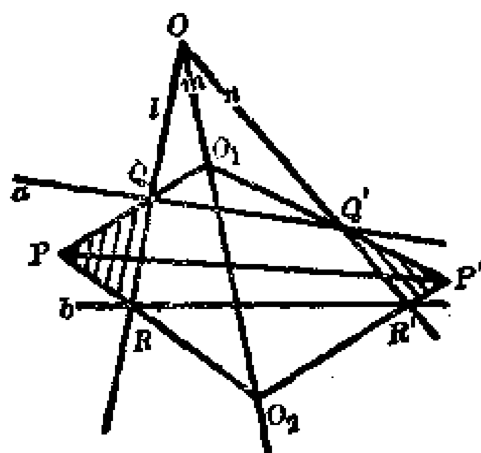


图　4.2

备注　代沙格(1593-1662) 是法国建筑师, 擅长几何. 他的三角形定理见1639 年一本关于圆锥曲线的小册子, 他在世时, 此书未能被人很好地接受. 他使用了近 70 个新名词, 其中仅"对合"一词被保留下来. 他的著作给两百年后的庞斯雷开辟了(研究射影几何的)道路.

代沙格三角形定理的重要意义不仅在于从它可推出一系列射影几何命题, 还在于它是平面射影几何的基础之一. 此地证明时利用了线性代数. 若用综合法, 则要先在空间证明它, 再在平面上证明. 因此, 要构作平面射影几何公理体系, 往往把它作为公理.

这定理中出现的图形含第一类元素点 $a_{11}=10$ 个, 含第二类元素线 $a_{22}=10$ 条. 每一点跟 $a_{12}=3$ 个第二类元素线接合. 每一线跟 $a_{21}=3$ 个第一类元素点接合. 这图形称为代沙格构形, 可用一个符号

	点(1)	线(2)
点(1)	a_{11}	a_{12}
线(2)	a_{21}	a_{22}

即 $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

来表示: a_{ii}, a_{jj} 分别表示第 i, j 类元素的个数, $a_{ij}(i\neq j)$ 表示每个第 i 类元素跟 a_{ij} 个第 j 类元素接合. 不难看出这些数目间有关系

$$a_{ii}\cdot a_{ij} = a_{jj}\cdot a_{ji}.$$

在三维空间, 多一个第三类元素平面, 空间代沙格构形用一个三阶矩阵作为符号.

三角形的代号是$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 表明构形是 3 点 3 线形, 每点与两线接合, 每线与两点接合.

试问能不能作出一个$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$的构形和一个$\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$的构形?

4.2 完全四点(角)形与完全四线(边)形

定义 平面内无三点共线的四点及其两两联线所构成的图形称为完全四点形(完全四角形). 它的代号是

$$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$$

这图形含四点及六直线,每一点称为顶点,每一直线称为边.不过同一顶点的两边称为对边,六边分为三对.每一对对边的交点称为对边点(对角点).三个对边点构成的三角形称为对角三角形(图 4.3).

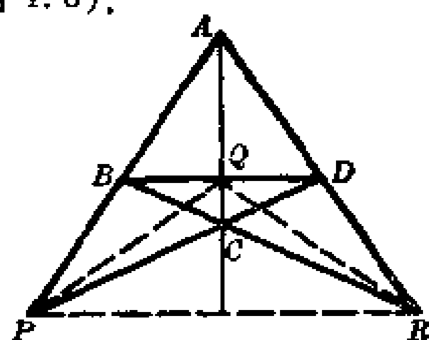


图 4.3 完全四点形 $ABCD$, 对角三角形 PQR.

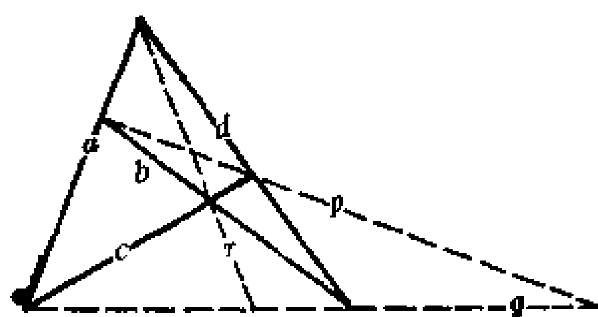


图 4.4 完全四线形 $abcd$, 对角三角形 pqr.

平面内无三线共点的四直线及其两两交点所构成的图形,称为完全四线形(完全四边形).它的代号是

$$\begin{pmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

这图形含四直线及六点,每一直线称为边,每一点称为顶点,不在同一边上的两个顶点称为对顶,六个顶点分为三对.每一对对顶的联线称为对顶线(对角线).三条对顶线构成的三角形称为对角三角形(图 4.4).

完全四点形的调和性质 完全四点形通过每一个对角点有一组调和线束,即通过这对角点的两边和对角三角形的两条边.

中国人民解放军

完全四线形的调和性质 完全四线形的每一条对角线上有一组调和点列，即这直线上的两个顶点和对角三角形的两个顶点.

我们先证第二个性质，再用来证第一个性质. 我们取对角线为例.

设 AB, SQ, RT 是完全四线形的三条对角线(图 4.5)，SQ, RT 交 AB 于 C, D. 则

$$ABCD \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} RTED$$

$$(E = RT \times SQ)$$

$$\overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} BACD.$$

所以

$$(AB, CD) = (BA, CD) = \frac{1}{(AB, CD)},$$

$$(AB, CD)^2 = 1,$$

从而

$$(AB, CD) = 1, \quad 或 \quad (AB, CD) = -1.$$

因 $(AB, CD) = 1$ 将导致四点 A, B, C, D 中有某两点重合，而这与现在的情况不合，所以 $(AB, CD) = -1$.

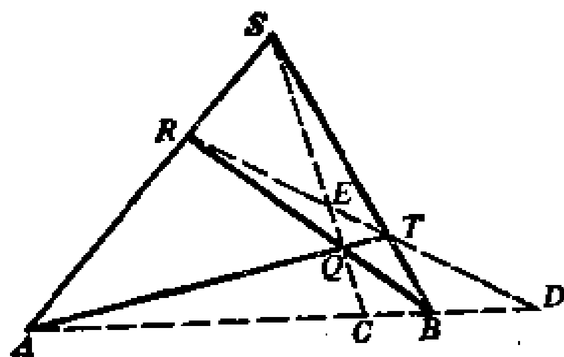


图 4.5

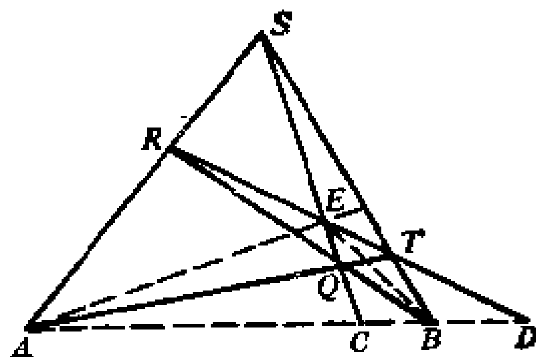


图 4.6

现在回转来证明完全四点形的调和性质. 我们取对角点 A 为

例. 为此,只须把图 4.5 上点 Q, R, S, T 理解为完全四点形的顶点,那末$\triangle ABE$ 是它的对角三角形(图 4.6). 要证明的是$A(RT, BE)=-1$. 因

$$
\begin{aligned}
A(RT, BE) &= A(RT, DE) \\
&= (RT, DE) \\
&= (AB, DC) \\
&\left(\text{因为}\quad RTDE \overset{S}{\underset{\wedge}{=}} ABDC\right) \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

证完.

注意,图 4.6 上共线四点 A, B, C, D 具有这样的性质:有一个完全四点形 $QRST$ 存在,它的一双对边通过 A,一双对边通过 B,另一双对边分别通过 C 和 D. 我们可以把这样的四点纯射影地定义为调和点列,使调和点列脱离前面利用距离的度量定义.

从这个命题还得出下面的作图题解法:已知共线的三点 A, B, C,求作 C 的调和共轭点 D.

这时可通过 C 任作一直线,在其上任取 C 以外的两点 Q 和 S,设 $R=SA\times QB$, $T=QA\times SB$, 则 $D=AB\times RT$ 为所求之点.

下面来证明**代沙格对合定理**.

定理 完全四点形的三双对边,被不通过任一顶点的一直线所截,所得三个点偶,是一个对合对应中的三个点偶.

图 4.7

证明 设直线 l 截完全四点形 $QRST$ 的三双对边于 A, A'; B, B'; C, C'(图 4.7). 求证它们是一个对合中的三对对应点.

以 S 为射影中心, 将 l 上四点 A, A', B, C' 投射为直线 RT 上四点 A, P, T, R, 再以 Q 为射影中心, 射回到直线 l 上, 便有

$$AA'BC' \underset{\wedge}{\overset{S}{=}} APTR \underset{\wedge}{\overset{Q}{=}} AA'CB'.$$

所以 $$(AA', BC') = (AA', CB').$$

利用交比性质得

$$(AA', BC') = (A'A, B'C).$$

所以

$$AA'BC' \underset{\wedge}{-} A'AB'C.$$

但在这射影对应中, 有一对对应点 A 和 A' 交互对应, 所以按 3.6 节定理 2, 这是一个对合, 在这对合中, A 和 A', B 和 B', C 和 C' 是三对对应点. 证完

这定理可以让我们解决 3.6 节解决过的作图问题. 我们知道, 对合由两对对应点决定, 设给定两对对应点 A 和 A', B 和 B', 求作一已知点 C 的对应点(图 4.7). 这时可通过 C 任引一直线, 于其上任取两点 Q 和 T, 设 $R = TA \times QB'$, $S = TB \times QA'$, 则 $C' = l \times RS$ 为 C 的对应点.

代沙格对合定理的对偶定理是

定理 完全四线形的三双对顶, 与不在任一边上的一点相联, 所得三个线偶, 是一个对合对应中的三个线偶(图 4.8).

4.3 巴卜斯定理

设直线 l 上有互异三点 A, B, C, 直线 l' 上有互异三点 A', B', C', 那末三点

$$L = BC' \times B'C$$

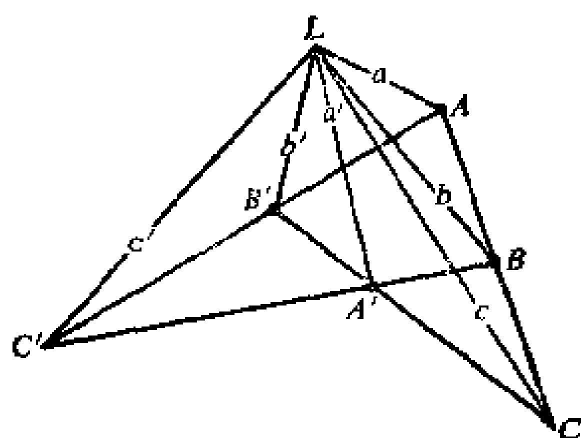


图 4.8

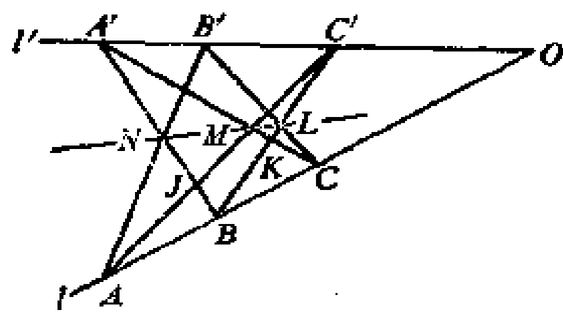


图 4.9

$$M = CA' \times C'A$$

$$N = AB' \times A'B$$

共线(图 4.9).

证明 设 $J = C'A \times A'B$, $K = BC' \times A'C$, $O = AB \times A'B'$. 那末

$$A'NJB \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'O \overset{C}{\underset{\wedge}{=}} KLC'B,$$

从而

$$A'NJB \underset{\wedge}{-} KLC'B.$$

这两个射影点列的公共点 B 自身对应, 所以是两个透视点列. 因此 $A'K, NL, JC'$ 应交于一点, 也就是说, NL 应通过 $A'K$ 与 JC' 的交点 M. 所以三点 L, M, N 共线. 证完.

这直线 LMN 称为巴卜斯线. 这构形有 9 点 9 线, 每点与3线接合, 每线与三点接合, 它的代号是

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

习 题

4.1 设△ABC 的顶点 A, B, C 分别在共点的三直线 α, β, γ 上移动, 且直线 AB 和 BC 分别通过定点 P 和 Q, 求证 CA 也通过 PQ 上的一个定点.

4.2 设 a, b, c, d 为平面内四条直线，不可能先定出交点 $a\times b$ 与 $c\times d$ 时，试作通过这两点的直线。

4.3 n 边形的顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别在一束中的直线 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 上移动；$n-1$ 条边 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n$ 分别通过定点 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$，求证第 n 条边也通过一个定点。

[利用习题4.1的结果，对于五边形($n=5$)作证明就可以了。]

4.4 三角形 ABC 的二顶点 A 与 B 分别在定直线 α 与 β 上移动，三边 AB, BC, CA 分别通过共线的定点 P, Q, R，求证顶点 C 也在一定直线上移动。

4.5 设两个完全四点形的五条对应边的交点共线，试用代沙格三角形定理证明第六条对应边的交点也在这直线上。

4.6 设 P, Q, R, S 是完全四点形的顶点，$A=PS\times QR$，$B=PR\times QS$，$C=PQ\times RS$，证 $A_1=BC\times QR$，$B_1=CA\times RP$，$C_1=AB\times PQ$ 三点共线。

4.7 已知线束中的三直线 a, b, c，求作直线 d 使 $(ab, cd)=-1$。

4.8 已知$\triangle ABC$及其平面上一点 P(不在任一边上)，联 AP, BP, CP 与对边交于 A', B', C'，且 $A_1=BC\times B'C'$，$B_1=CA\times C'A'$，$C_1=AB\times A'B'$。求证

1° $(BC, A_1A')=-1$，$(CA, B_1B')=-1$，

$(AB, C_1C')=-1$；

2° A_1, B_1, C_1 三点共线。

若 P 为重心，由初等几何验证上述定理。

若 P 为内心，试问得出什么定理？

4.9 设 AD，BE，CF 为 $\triangle ABC$ 的三高线，$EF\times BC=D'$，求证$(BC, DD')=-1$。在等腰三角形 $AB=AC$ 的情况，这命题给出什么结论？

4.10 设4.3节巴卜斯线交 l 于 P，交 l' 于 Q'，证明这两点是由三对对应点 A, A'；B, B'；C, C' 决定的射影对应中，l 和 l' 的交点分别在 l 和 l' 上的对应点。

第五章　射影坐标系和射影变换

这一章我们介绍两个内容，一个是射影坐标，一个是射影变换．以前所用的都是正交笛氏坐标，这种坐标是建立在度量观念(距离)基础上的，而距离却又不是射影几何对象．所以为了配合射影几何的研究，有必要介绍一种建立在射影不变量——交比的基础上的坐标系．在建立了射影坐标以后，进一步阐明，射影几何事项用射影坐标来表达，和用笛氏坐标来表达，有相同的代数结构．这当中的关键就在于两种坐标的转换关系．

介绍第二个内容射影变换时，着重点变换和线变换式以及二维射影变换的基本定理．这里提到变换群的概念以及如何用这个近代的群的观点来说明欧氏几何、仿射几何、射影几何的联系和区别．

5.1　一维射影坐标系

在一直线上取定彼此不重合的三点 A_1, A_2, E，设 P 为这直线上任意一点，我们已经知道，P 点和 A_1, A_2, E 确定一个交比

$$\lambda=(A_1A_2, EP).$$

反转来，对于一个实数 λ，也有唯一的点 P 与之对应．我们把 λ 称为 P 点在坐标系 A_1, A_2, E 下的**射影坐标**．

这样规定的射影坐标称为**非齐次的**．像笛氏坐标一样，若

$$\lambda=\frac{x_1}{x_2},$$

则称 (x_1, x_2) 为 P 点的**齐次射影坐标**．对于任意的数 $\rho(\neq 0)$，坐标 $(\rho x_1, \rho x_2)$ 和 (x_1, x_2) 代表同一点，$(0, 0)$ 不代表任何点，而 $x_2=0$ 看作与 $\lambda=\infty$ 相对应．

E 点的坐标是

$$\lambda_E=(A_1A_2,EE)=\frac{A_1E\cdot A_2E}{A_1E\cdot A_2E}=1=1:1;$$

A_1 点的坐标是(利用极限概念)

$$\lambda_{A_1}=(A_1A_2,EA_1)=\frac{A_1E\cdot A_2A_1}{A_1A_1\cdot A_2E}=\infty=1:0;$$

A_2 点的坐标是

$$\lambda_{A_2}=(A_1A_2,EA_2)=\frac{A_1E\cdot A_2A_2}{A_1A_2\cdot A_2E}=0=0:1.$$

我们把 $A_1(1,0)$ 称为第一基点，$A_2(0,1)$ 称为第二基点，$E(1,1)$则称为这个射影坐标系的单位点.

对偶地，通过一点取定彼此不重合的三直线 a_1,a_2,e，设 p 为这线束中任一直线，直线 p 和 a_1,a_2,e 确定一个交比

$$\lambda=(a_1,a_2,ep)=\frac{u_1}{u_2},$$

λ 称为直线 p 在坐标系 a_1,a_2,e 下的非齐次射影坐标，(u_1,u_2)称为 p 的齐次射影坐标. 对于任意的数 $\rho(\neq 0)$，坐标$(\rho u_1,\rho u_2)$和(u_1,u_2)代表同一直线，$(0,0)$不代表任何直线，而 $u_2=0$ 看作与 $\lambda=\infty$ 相对应.

由于 $\lambda=(a_1,a_2,e,p)=\dfrac{\sin(\widehat{a_1e})\cdot\sin(\widehat{a_2p})}{\sin(\widehat{a_1p})\cdot\sin(\widehat{a_2e})}$,

直线 e,a_1,a_2 的坐标是

$$\lambda_e=1=1:1,$$
$$\lambda_{a_1}=\infty=1:0,$$
$$\lambda_{a_2}=0=0:1.$$

$a_1(1,0)$称为这坐标系的第一基线，$a_2(0,1)$称为第二基线，$e(1,1)$称为单位线.

射影坐标与笛氏坐标的转换 让我们以直线上的点坐标来说

明射影坐标与笛氏坐标间的关系．设 A_1, A_2, E, P 四点的笛氏坐标分别为 x_1, x_2, x_e, x；射影坐标为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_e, \lambda$．则

$$\lambda=(A_1A_2, EP)=(x_1x_2, x_ex)=\frac{(x_e-x_1)(x-x_2)}{(x_e-x_2)(x-x_1)},$$

置 $k=\dfrac{x_e-x_1}{x_e-x_2}$，则

$$\lambda=\frac{kx-kx_2}{x-x_1},$$

$$\begin{vmatrix} k & -kx_2 \\ 1 & -x_1 \end{vmatrix}=k(x_2-x_1)$$

$$=\frac{(x_e-x_1)(x_2-x_1)}{x_e-x_2}\neq 0.$$

可见同一点的笛氏坐标 x 和射影坐标 λ 之间，有一个行列式不等于零的双一次关系，或者说它们之间的关系是射影对应(3.4节)．于是由 3.4 节定理 2 的证明，四点的交比既等于该四点笛氏坐标的交比，便也等于该四点射影坐标的交比。

射影坐标的特例

(1) **仿射坐标**　取 A_1 为直线上的无穷远点 P_∞，取 A_2 为原点 O，则

$$\lambda=(A_1A_2, EP)=(P_\infty A_2, EP)=(PE, A_2P_\infty)$$

$$=(PEA_2)=\frac{A_2P}{A_2E}=\frac{OP}{OE}.$$

这时 P 点的射影坐标是仿射坐标，即原点到该点与原点到单位点的有向距离之比．

(2) **笛氏坐标**　取 A_1 为直线上的无穷远点 P_∞，取 A_2 为原点 O，且设 A_2E 等于单位长度，则由上述，

$$\lambda=OP$$

为 P 点的笛氏坐标．原来笛氏坐标是射影坐标的一种特例。

5.2　平面内的射影坐标系

在平面内取一个三角形 $A_1A_2A_3$. 称之为坐标三角形. 在三角形三边(直线)以外取一点 E, 称之为单位点(图 5.1). 无三点共线的这样四点 A_1, A_2, A_3, E 构成一个射影坐标系.

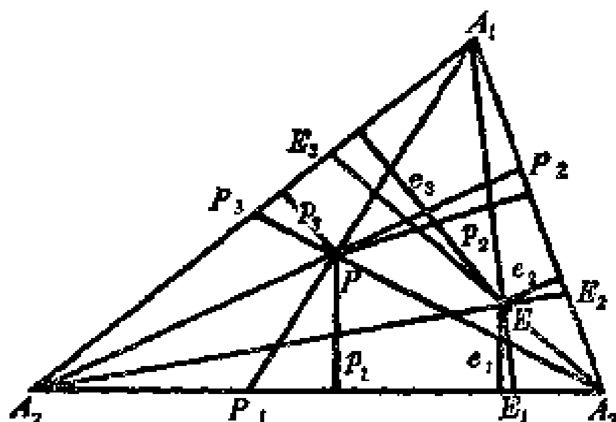


图　5.1

设 P 为平面内任一点, 坐标三角形三边到 E 点的距离分别记为 e_1, e_2, e_3; 到 P 点的距离分别记为 p_1, p_2, p_3. 这些都是有向距离, 例如按解析几何的规定加以计算. 规定

$$(1)\qquad x_1:x_2:x_3=\frac{p_1}{e_1}:\frac{p_2}{e_2}:\frac{p_3}{e_3},$$

并称 (x_1, x_2, x_3) 为 P 点的射影坐标.

显然对于任意一数 $\rho(\neq 0)$, $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$ 和 (x_1, x_2, x_3) 代表同一点, 并且 $(0, 0, 0)$ 不代表任何点, 因为没有一点同时使 $p_1=0$, $p_2=0$, $p_3=0$.

把(1)式写作

$$\frac{x_1}{\frac{p_1}{e_1}}=\frac{x_2}{\frac{p_2}{e_2}}=\frac{x_3}{\frac{p_3}{e_3}},$$

并令其公比为 $\frac{1}{\rho}$, 则有

(2) $$\rho x_1=\frac{p_1}{e_1},\ \rho x_2=\frac{p_2}{e_2},\ \rho x_3=\frac{p_3}{e_3}.$$

一点P在直线A_2A_3上的充要条件为$p_1=0$，亦即$x_1=0$，所以在这射影坐标系下，坐标三角形的边A_2A_3的方程为$x_1=0$．仿此，A_3A_1的方程为$x_2=0$，A_1A_2的方程为$x_3=0$．

需要强调的是：过去在笛氏坐标系下，$x_3=0$代表平面上的无穷远线，而在射影坐标系下，$x_3=0$则代表坐标三角形的第三边．

当P与A_1重合时，$p_2=0$，$p_3=0$，而$p_1\neq0$，从而$x_2=0$，$x_3=0$而$x_1\neq0$．因此，坐标三角形第一个顶点A_1的坐标是$(1,0,0)$．仿此A_2的坐标是$(0,1,0)$，A_3的坐标是$(0,0,1)$．

在本章一开始，我们声明了建立射影坐标的目的，在于把它从距离的概念中解放出来，从而更好地配合射影几何的研究．而在上面过程中仍然使用了距离概念，好象没有达到目标．实际情况并非如此．射影坐标是可以用射影几何的对象交比来表达的．为此，设A_iP，$A_iE(i=1,2,3)$与坐标三角形中A_i的对边相交于P_i，E_i（图5.1），则

$$\begin{aligned}(A_2A_3,E_1P_1)&=A_1(A_2A_3,E_1P_1)\\&=\frac{\sin A_2\hat{A}_1E_1\cdot\sin A_3\hat{A}_1P_1}{\sin A_2\hat{A}_1P_1\cdot\sin A_3\hat{A}_1E_1}\\&=\frac{\dfrac{e_3}{A_1E}\cdot\dfrac{p_2}{A_1P}}{\dfrac{p_3}{A_1P}\cdot\dfrac{e_2}{A_1E}}=\frac{e_3p_2}{p_3e_2}\\&=\frac{\dfrac{p_2}{e_2}}{\dfrac{p_3}{e_3}}=x_2:x_3.\end{aligned}$$

仿此，

$$(A_3A_1,E_2P_2)=x_3:x_1,\quad(A_1A_2,E_3P_3)=x_1:x_2.$$

现举两例表明射影坐标的应用，这时不靠技巧就可以证明一些射影命题.

例 1 证明巴卜斯定理(4.3 节).

仍使用那里的记号，我们取 A, B, A' 作为坐标三角形的顶点，取 B' 作为单位点(图 5.2). 于是可以假设 C 的坐标为 $(1, \alpha, 0)$，因为 A, B 两点末尾的坐标都是零；仿此可设 C' 的坐标为 $(1, 1, \beta)$，因为 A', B' 两点前两坐标都是相等的(即 $A'B'$ 的方程是 $x_1-x_2=0$). 到此得 $A'B$ 和 AB' 两线的方程

$$A'B: \quad x_1=0; \qquad AB': \quad x_2-x_3=0,$$

它们的交点是 $N(0, 1, 1)$.

直线 $A'C$ 的方程是：

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\alpha x_1-x_2.$$

仿此直线 AC' 的方程是 $\beta x_2-x_3=0$. 这两线交点是：

$$M(1, \alpha, \alpha\beta).$$

同理求得 $B'C$ 与 BC' 两线交点的射影坐标：

$$L(1, \alpha+\beta-\alpha\beta, \beta).$$

到此容易证明

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha+\beta-\alpha\beta & \beta \\ 1 & \alpha & \alpha\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \beta(1-\alpha) & \beta(1-\alpha) \\ 1 & \alpha & \alpha\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

所以 L, M, N 三点共线.

例 2 设$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 以点 P 为透视心，$\triangle ABC$ 与 $\triangle B'C'A'$ 以 Q 为透视心. 求证 $\triangle ABC$ 与 $\triangle C'A'B'$ 也成透视.

设各点的射影坐标为(图 5.3)：

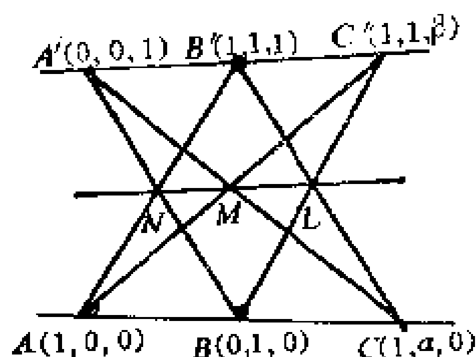


图 5.2

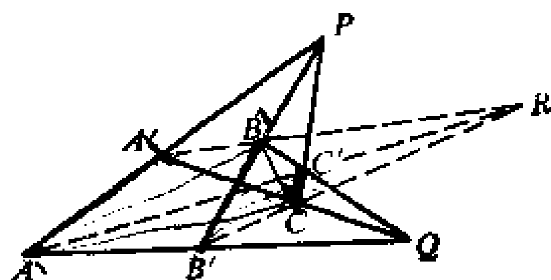


图 5.3

$$A(1,0,0),\quad A'(1,1,1),$$
$$B(0,1,0),\quad B'(\alpha,\beta,1),$$
$$C(0,0,1),\quad C'(\gamma,\delta,1).$$

由假设，三条直线

$$AA'(0,-1,1),\quad BB'(1,0,-\alpha),\quad CC'(-\delta,\gamma,0)$$

共点 P，得条件: $\gamma=\alpha\delta$.

又由假设，三条直线

$$AB'(0,-1,\beta),\quad BC'(1,0,-\gamma),\quad CA'(-1,1,0)$$

共点 Q，得条件: $\beta=\gamma$.

于是点 B'，C' 的坐标可写为

$$B'(\alpha,\alpha\delta,1,),\quad C'(\alpha\delta,\delta,1).$$

从而得三直线 AC'，BA'，CB' 的坐标分别为$(0,-1,\delta)$，$(1,0,-1)$，$(-\alpha\delta,\alpha,0)$. 这三矢量的行列式为零，表明三直线 AC'，BA'，CB' 也共一点 R.

5.3 射影坐标的特例

在这一节里我们介绍射影坐标的三种特例.

(1) **仿射坐标** 将坐标三角形的一边例如 A_1A_2 取为无穷远线，那末有$\frac{p_3}{e_3}\to1$，这时平面上一点 P 的坐标变成

$$\rho x_1=\frac{p_1}{e_1},\ \rho x_2=\frac{p_2}{e_2},\ \rho x_3=1.$$

如果写成非齐次坐标，便有

$$x=\frac{x_1}{x_3}=\frac{p_1}{e_1},$$

$$y=\frac{x_2}{x_3}=\frac{p_2}{e_2}.$$

由E和P引平行线分别与A_3A_1及A_3A_2平行，这些平行线与A_3A_2及A_3A_1相交，给出长度e_1'、e_2'和p_1'，p_2'（图 5.4）．由相似三角形得

$$x=\frac{p_1}{e_1}=\frac{p_1'}{e_1'},$$

$$y=\frac{p_2}{e_2}=\frac{p_2'}{e_2'}.$$

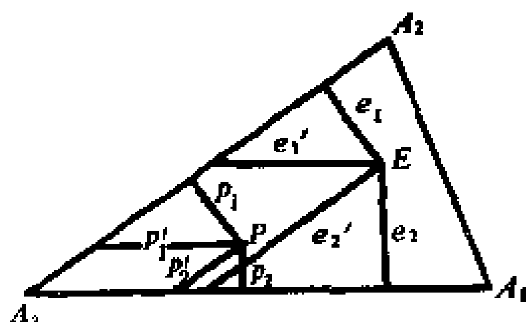


图　5.4

这样得出的坐标称为平面内点的仿射坐标，A_3是坐标原点，A_3A_1是x轴，A_3A_2是y轴．E是单位点．由于E点可以随意取定（但不在x轴和y轴上），e_1与e_2或e_1'与e_2'可以不相等．所以仿射坐标正是轴上刻度单位可以不同的斜角坐标．

（2）**笛氏坐标**　这种坐标又可以看作仿射坐标的特例，即选取E点时使$e_1=e_2$或$e_1'=e_2'$，把$e_1'=e_2'$选作长度单位，便有

$$x=p_1',\quad y=p_2'.$$

这正是笛氏坐标（一般是斜角坐标）．

5.4　坐标转换

这一节我们要找出同一点在不同的射影坐标系下的坐标之间，按什么规律转换．我们取大家熟悉的正交笛氏坐标作媒介，首先求射影坐标与笛氏坐标间的转换关系．

设射影坐标系的坐标三角形三边 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 在正交笛氏坐标系下的方程分别为

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \\ a_3x+b_3y+c_3=0. \end{cases}$$

由解析几何，三边到平面内一点 $P(x, y)$ 的有向距离为

$$p_i=\frac{a_ix+b_iy+c_i}{\varepsilon_i\sqrt{a_i^2+b_i^2}}$$

($i=1, 2, 3$; $\varepsilon_i=+1$ 或 -1 视情况而定).

仍以 (x_1, x_2, x_3) 表 P 点的射影坐标，则

$$\rho x_i=\frac{p_i}{e_i}=\frac{a_ix+b_iy+c_i}{\varepsilon_ie_i\sqrt{a_i^2+b_i^2}}\qquad (i=1, 2, 3).$$

置 $\quad k_i=(\varepsilon_ie_i\sqrt{a_i^2+b_i^2})^{-1}$ （k_i 为常数），则

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho x_1=k_1(a_1x+b_1y+c_1), \\ \rho x_2=k_2(a_2x+b_2y+c_2), \\ \rho x_3=k_3(a_3x+b_3y+c_3). \end{cases}$$

由于三角形三边没有公共点，所以 $|abc|\neq 0$.

如果改换符号，置 $k_ia_i=\alpha_i, k_ib_i=\beta_i, k_ic_i=\gamma_i$ ($i=1,2,3,$)，便有

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho x_1=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1, \\ \rho x_2=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2, \quad |\alpha\beta\gamma|=k_1k_2k_3|abc|\neq 0. \\ \rho x_3=\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3, \end{cases}$$

设 P 点的笛氏齐次坐标为 (x, y, t)，则上式又可写作

$$(4)\qquad \begin{cases} \sigma x_1=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1t, \\ \sigma x_2=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2t, \quad |\alpha\beta\gamma|\neq 0. \\ \sigma x_3=\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3t, \end{cases}$$

(3) 式表示 P 点的齐次射影坐标 (x_1, x_2, x_3) 与非齐次笛氏坐标 (x, y) 间的关系. (4) 式表示 P 点的齐次射影坐标 (x_1, x_2, x_3) 与

齐次笛氏坐标(x, y, t)间的关系. 注意: 行列式$|abc|\neq 0$或$|\alpha\beta\gamma|\neq 0$保证由(4)式可解出$x, y, t$, 并且外形与(4)相同.

现在进一步求平面上同一点P对于两个射影坐标系的坐标(x_1, x_2, x_3)与(x'_1, x'_2, x'_3)之间的转换关系. 对于第二个坐标三角形$A'_1A'_2A'_3$和单位点E'重复上述推理, 得出与(4)类似的关系

$$(4')\qquad \begin{cases}\sigma' x'_1=\alpha'_1 x+\beta'_1 y+\gamma'_1 t,\\ \sigma' x'_2=\alpha'_2 x+\beta'_2 y+\gamma'_2 t,\quad |\alpha'\beta'\gamma'|\neq 0.\\ \sigma' x'_3=\alpha'_3 x+\beta'_3 y+\gamma'_3 t,\end{cases}$$

由(4)式解出x, y, t, 代入(4')得出两组射影坐标间形如下式的变换:

$$(5)\qquad \begin{cases}\lambda x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \lambda x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\quad |a_{ij}|\neq 0.\\ \lambda x'_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\end{cases}$$

总之, 行列式不等于零的线性变换(5)代表射影坐标的转换公式.

由公式(4)容易看出, 用射影坐标表达的一次式

$$(6)\qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0,$$

用笛氏坐标x, y, t表达也是一次式, 因而轨迹是直线. 反过来, 直线由x, y, t的一次式表达, 因而也由射影坐标x_1, x_2, x_3的一次式(6)表达.

设直线(6)上有两定点(y_1, y_2, y_3)及(z_1, z_2, z_3), 则有

$$u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3=0,$$

$$u_1z_1+u_2z_2+u_3z_3=0.$$

由这两式和(6)消去u_1, u_2, u_3得

$$|xyz|=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

上式即是由两点 y 和 z 决定的直线方程，其外形与在笛氏坐标系完全一致．并且和 3.1 节一样，矢量 x 可表为矢量 y 和 z 的线性组合：$x=\lambda y+\mu z$（λ 和 μ 是组合系数），即是说，和在笛氏坐标下一样，直线上任一点可用其上两点作为基底线性地表达．

5.5 射影变换

在解析几何中，我们知道，下述平移公式有两种不同解释：

$$(a)\qquad \begin{cases} x'=x+2, \\ y'=y+1, \end{cases}$$

即（一）它代表笛氏坐标的变换（图 5.5），表达同一点 P 在两个笛氏坐标系 Oxy 和 $O'x'y'$ 下的坐标间的关系，由这种观点，(a) 称为坐标变换，即坐标系的平移，将原点移到 $(-2, -1)$ 处；（二）它代表

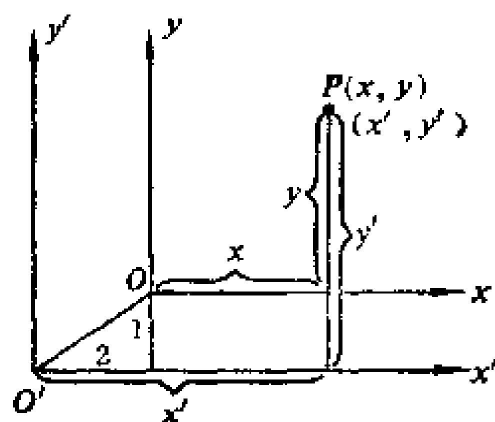


图 5.5

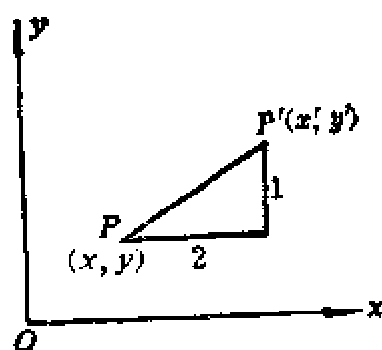
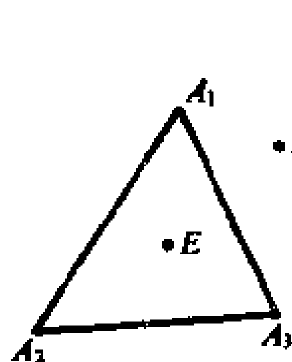


图 5.6

点变换（图 5.6），即点的平移，这时坐标系只有一个，平面上每一点 $P(x, y)$ 按公式 (a) 平移到 $P'(x', y')$．顺便提一下，两个平移的长度相同，方向却相反．

同样，上节公式(5)也有两种解释．在上节，我们把它解释为射影坐标变换，规定同一点在两种射影坐标系下的坐标之间的关系（图 5.7）．现在把它解释为点变换，称为射影变换，规定一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 和它的对应点 $P'(x_1', x_2', x_3')$ 在同一坐标系下的坐标之间的



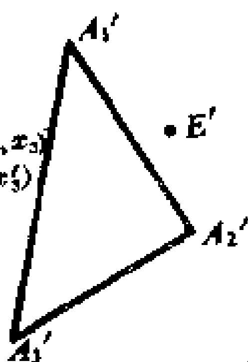


图 5.7

图 5.8

关系(图 5.8). 注意, 它是 3.4 节公式(2′)所表达的一维射影变换的推广.

现在我们把上节(5)式写作

$$(1)\qquad \begin{cases}\rho x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\ \rho x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \quad |a_{ij}| \neq 0.\\ \rho x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,\end{cases}$$

并把它当作射影变换, 即当作同一坐标系下两点间的对应. 由于 $|a_{ij}| \neq 0$, 我们可以解出 x_1, x_2, x_3 得出逆变换:

$$(2)\qquad \begin{cases}\sigma x_1 = A_{11}x_1' + A_{21}x_2' + A_{31}x_3',\\ \sigma x_2 = A_{12}x_1' + A_{22}x_2' + A_{32}x_3',\\ \sigma x_3 = A_{13}x_1' + A_{23}x_2' + A_{33}x_3'.\end{cases}$$

其中 A_{ij} 是 $|a_{ij}|$ 内 a_{ij} 的代数余因子. 注意 (2) 中系数的顺序与 (1)不同, 并且由代数知识得出行列式 $|A_{ij}| = |a_{ij}|^2 \neq 0$.

行列式 $|a_{ij}| \neq 0$ 的射影对应使得点与点之间成一一对应, 这种射影对应称为正常(或非奇)的射影变换. 如果 $|a_{ij}| = 0$, 逆换便不存在, 一一对应也被破坏了. 以下只讨论正常的射影对应.

现在来证明, 将点变为点的射影变换(1)和(2)诱导一个将直线变为直线的射影变换, 并求出变换的规律.

设动点 x 在定直线 u 上, 即设

$$(b) \qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0,$$

试问与点 x 对应的诸点的轨迹为何？将(2)式给出的值 $x_i(i=1,2,3)$代入，得

$$u_1(A_{11}x'_1+A_{21}x'_2+A_{31}x'_3)+u_2(A_{12}x'_1+A_{22}x'_2+A_{32}x'_3)$$
$$+u_3(A_{13}x'_1+A_{23}x'_2+A_{33}x'_3)=0,$$

可见点 x' 在直线

$$(c) \qquad u'_1x'_1+u'_2x'_2+u'_3x'_3=0$$

上，其中直线 u 与对应直线 u' 的变换关系如下：

$$(3) \qquad \begin{cases} \tau u'_1=A_{11}u_1+A_{12}u_2+A_{13}u_3, \\ \tau u'_2=A_{21}u_1+A_{22}u_2+A_{23}u_3, \\ \tau u'_3=A_{31}u_1+A_{32}u_2+A_{33}u_3. \end{cases}$$

如果要得出以 u'_i 表示 u_j 的变换式，可将(3)对 u_j 解出，但这样办，要求出行列式 $|A_{ij}|$ 中各元的代数余因子．因此采取另一途径，将(1)式代入(c)，仿上求得(3)的逆变换：

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda u_1=a_{11}u'_1+a_{21}u'_2+a_{31}u'_3, \\ \lambda u_2=a_{12}u'_1+a_{22}u'_2+a_{32}u'_3, \\ \lambda u_3=a_{13}u'_1+a_{23}u'_2+a_{33}u'_3. \end{cases}$$

总上所述，射影变换使点与点间、直线与直线间成一一对应．变换式由(1)，(2)，(3)，(4)给出．

5.6 二维射影几何基本定理

由 3.4 节定理 4，我们知道三对元素决定一维射影变换，现在来证明二维情况的类似定理．为此，先证

引理 *使三个基点(1, 0, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1)和单位点(1, 1, 1)分别变为无三点共线之四点 $P_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$P_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$，$P_3(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$，$P_4(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ 的射影变换有一个而且只有一个存在．*

要证明这种变换的存在，问题在于能找到 9 个系数 a_{ij} 使 $|a_{ij}|$

$\neq 0$. 以四个基点和 P_i 的坐标分别代入 5.5 节(1)式, 并注意比例因子 ρ 对于不同的点各有其值, 便得 a_{ij} 和 ρ_k 所满足的方程组:

$$
(1)\quad \begin{cases}
\rho_1\alpha_1 = a_{11},\quad \rho_2\beta_1 = a_{12},\quad \rho_3\gamma_1 = a_{13},\\
\qquad\rho_4\delta_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13},\\
\rho_1\alpha_2 = a_{21},\quad \rho_2\beta_2 = a_{22},\quad \rho_3\gamma_2 = a_{23},\\
\qquad\rho_4\delta_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23},\\
\rho_1\alpha_3 = a_{31},\quad \rho_2\beta_3 = a_{32},\quad \rho_3\gamma_3 = a_{33},\\
\rho_4\delta_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33},\ \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 \neq 0.
\end{cases}
$$

由此可知, 如果决定了 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, 那末 a_{ij} 也就决定了. 将(1)式中各 a_{ij} 消去便得出 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ 间的一组关系:

$$
\begin{cases}
\rho_1\alpha_1 + \rho_2\beta_1 + \rho_3\gamma_1 - \rho_4\delta_1 = 0,\\
\rho_1\alpha_2 + \rho_2\beta_2 + \rho_3\gamma_2 - \rho_4\delta_2 = 0,\\
\rho_1\alpha_3 + \rho_2\beta_3 + \rho_3\gamma_3 - \rho_4\delta_3 = 0.
\end{cases}
$$

从这里求出

$$
\frac{\rho_1}{\begin{vmatrix}\delta_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}}
=\frac{\rho_2}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \delta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}}
=\frac{\rho_3}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \delta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3\end{vmatrix}}
$$

$$
=\frac{\rho_4}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}}.
$$

由于假设四点 P_i 中无三点共线, 四个行列式都不等于零, 从而每个 ρ_i 不为零. 以 k 表公比, 则

$$
\rho_1 = k|\delta\beta\gamma|,\ \rho_2 = k|\alpha\delta\gamma|,\ \rho_3 = k|\alpha\beta\delta|,\ \rho_4 = k|\alpha\beta\gamma|.
$$

代入(1)式得 a_{ij} 的值, 再代入 5.5 节(1)式, 并置 $\frac{\rho}{k} = \rho'$, 就得出

$$
(2)\quad \begin{cases}
\rho' x_1' = |\delta\beta\gamma|\alpha_1 x_1 + |\alpha\delta\gamma|\beta_1 x_2 + |\alpha\beta\delta|\gamma_1 x_3,\\
\rho' x_2' = |\delta\beta\gamma|\alpha_2 x_1 + |\alpha\delta\gamma|\beta_2 x_2 + |\alpha\beta\delta|\gamma_2 x_3,\\
\rho' x_3' = |\delta\beta\gamma|\alpha_3 x_1 + |\alpha\delta\gamma|\beta_3 x_2 + |\alpha\beta\delta|\gamma_3 x_3.
\end{cases}
$$

所求变换如果存在，就由(2)式表达；反过来，(2)式显然满足引理的要求，并且由(1)式行列式

$$|a_{ij}|=\rho_1\rho_2\rho_3\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{k}\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\neq 0.$$

所以引理证完.

现在来证明基本定理.

定理 设 P_1, P_2, P_3, P_4 是平面内任意给定的无三点共线的四点；P_1', P_2', P_3', P_4' 也是任意给定的无三点共线的四点. 那末有一个而且只有一个射影变换存在使 P_1, P_2, P_3, P_4 分别转换为 P_1', P_2', P_3', P_4'.

证明 以 R_1 表示将四基点变为四点 P_i 的射影变换，以 R_2 表示将四基点变为四点 P_i' 的射影变换，即

$$R_1[A_1, A_2, A_3, E]=[P_1, P_2, P_3, P_4],$$

$$R_2[A_1, A_2, A_3, E]=[P_1', P_2', P_3', P_4'].$$

以 R_1^{-1} 表示 R_1 的逆变换，置 $R=R_2R_1^{-1}$，则有一个射影变换 R 存在，变 P_i 为 P_i':

$$\begin{aligned}R[P_1, P_2, P_3, P_4]&=R_2R_1^{-1}[P_1, P_2, P_3, P_4]\\&=R_2[A_1, A_2, A_3, E]\\&=[P_1', P_2', P_3', P_4'].\end{aligned}$$

存在性证明了.

要证这种变换的唯一性，假设 $\bar{R}$ 为任一射影变换，使

$$\bar{R}[P_1, P_2, P_3, P_4]=[P_1', P_2', P_3', P_4'].$$

我们来证明 $\bar{R}=R$.

由于 $\quad \bar{R}R_1[A_1, A_2, A_3, E]=\bar{R}[P_1, P_2, P_3, P_4]$

$$=[P_1', P_2', P_3', P_4'],$$

又由引理，只有一个射影变换分别变 A_1, A_2, A_3, E 为 P_1', P_2', P_3', P_4'，所以

$$\bar{R}R_1 = R_2,$$

从而 $\bar{R} = R_2R_1^{-1} = R$. 证完.

系 设 P_1, P_2, P_3, P_4 是平面内无三点共线的四点. 凡保留这四点不变的射影变换，一定是幺变换 $\rho x_i' = x_i (i=1,2,3)$.

定理 二维射影变换使得一个点列和对应点列成射影对应. 换言之，四点的交比不因射影变换而变.

证明 设有共线四点，取其中两点为基底，无妨设其射影坐标为 $y(y_1, y_2, y_3)$, $z(z_1, z_2, z_3)$, $y+\lambda_1 z$, $y+\lambda_2 z$.

设射影变换 $\rho X_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j$ 将点 y 和 z 变换为 Y 和 Z:

$$\alpha Y_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}y_j, \quad \beta Z_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}z_j.$$

在这个变换下，点 $y+\lambda_1 z$ 被变为

$$\gamma X_i = \Sigma a_{ij}(y_j+\lambda_1 z_j) = \Sigma a_{ij}y_j + \lambda_1 \Sigma a_{ij}z_j$$
$$= \alpha Y_i + \lambda_1 \beta Z_i;$$

点 $y+\lambda_2 z$ 被变换为

$$\delta X_i = \alpha Y_i + \lambda_2 \beta Z_i.$$

总之原先的四点 $y, z, y+\lambda_1 z, y+\lambda_2 z$ 被变换为四点 αY, βZ, $\alpha Y+\lambda_1(\beta Z)$, $\alpha Y+\lambda_2(\beta Z)$. 所以变换前后的四点的交比同等于 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. 即四点的交比被二维射影变换保留不变.

同理，若由线坐标变换公式出发，可以证明在二维射影变换下，平面内的一个线束和对应线束成射影对应.

5.7 射影变换的二重元素(或固定元素)

不为射影变换所变更的元素(点和直线)，称为射影变换的二重元素．一维射影几何讲过自对应元素或二重元素(3.6 节)．下面研究二重点和二重直线如何求得．先讨论二重点的问题．

设点 y 是射影变换(5.5 节(1)式)

$$(1)\quad \rho x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \quad (|a_{ij}|\neq 0)$$

的二重点，即变换以后的点 y' 重合于其自身：

$$\frac{y'_1}{y_1}=\frac{y'_2}{y_2}=\frac{y'_3}{y_3}=\alpha(\text{比例因子}).$$

代入上式得(令 $\rho\alpha=\mu$)

$$(2)\quad \begin{cases}(a_{11}-\mu)y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3=0,\\ a_{21}y_1+(a_{22}-\mu)y_2+a_{23}y_3=0,\\ a_{31}y_1+a_{32}y_2+(a_{33}-\mu)y_3=0.\end{cases}$$

由于 y_1, y_2, y_3 不能同时为零，故 μ 必须适合方程

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\mu & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\mu\end{vmatrix}=0.$$

总之，要求射影变换(1)的二重点，第一步求变换矩阵的特征方程(3)的根．第二步将所求每一特征根代入(2)解出相应的二重点．

现在要求变换(1)的二重直线，如果 u 是一条二重直线，则

$$\frac{u'_1}{u_1}=\frac{u'_2}{u_2}=\frac{u'_3}{u_3}=\beta(\text{比例因子}).$$

仿上述代入 5.5 节(4)式 $\lambda u_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ji}u'_j$，并令 $\nu=\lambda/\beta$，则得

$$
(4)\qquad \begin{cases}(a_{11}-\nu)u_1+a_{21}u_2+a_{31}u_3=0,\\ a_{12}u_1+(a_{22}-\nu)u_2+a_{32}u_3=0,\\ a_{13}u_1+a_{23}u_2+(a_{33}-\nu)u_3=0.\end{cases}
$$

由于 u_1, u_2, u_3 是直线的坐标，不同时为零，故 ν 必须适合方程

$$
(5)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\nu & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22}-\nu & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\nu \end{vmatrix}=0.
$$

注意，此式可由(3)互换行与列而得，故其三根与(3)式的相同。

因之求二重直线的第一步仍为求变换矩阵的特征根，第二步将每一特征根代入(4)式，便解出该特征根对应的二重直线。

5.8 射影变换的特例

这一节我们把运动变换以及第一章所讲的仿射变换，看作射影变换的特例．为此，我们把坐标三角形第三个顶点 A_3 取为仿射或笛氏坐标的原点，第三边 $a_3(x_3=0)$ 取为无穷远线．

我们对射影变换 $\rho x_i'=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}x_j(i=1,2,3)$, $|a_{ij}|\neq 0$, 分别加上下述限制：

(i) 使某一直线固定不变，注意这并不意味着它上面每一点不变；

(ii) 使某一直线上二点固定不变，或使它们相互转换．

先讨论第一种情况，取该固定直线的方程为 $x_3=0$, 那末使得这一直线不变的射影变换，其形如下：

$$
(1)\quad \begin{cases}\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \rho x_3'=\qquad\qquad\qquad\quad a_{33}x_3,\end{cases}\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}a_{33}\neq 0.
$$

置 $x=\frac{x_1}{x_3}$，$y=\frac{x_2}{x_3}$，则上式又可写成下形

$$(2)\quad \begin{cases} x'=\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_0, \\ y'=\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

这正是第一章介绍过的仿射变换，因此，仿射变换是射影变换的一种，它使得无穷远直线不变．它将有限点变为有限点，无穷远点变为无穷远点．

再来讨论第二种情况．在无穷远直线上取两个点 $I(1,i,0)$，$J(1,-i,0)$，试求以这两点为二重点的仿射变换．以 $(1,i,0)$和$(1,-i,0)$代入(1)，得

$$\begin{cases} \rho=a_{11}+ia_{12}, \\ i\rho=a_{21}+ia_{22}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho'=a_{11}-ia_{12}, \\ -i\rho'=a_{21}-ia_{22}. \end{cases}$$

由此得出 $$a_{11}=a_{22}, \quad -a_{12}=a_{21}.$$

置 $x=\frac{x_1}{x_3}$，$y=\frac{x_2}{x_3}$，刚才得出的关系(2)可写为

$$(3)\quad \begin{cases} x'=\alpha x-\beta y+h, \\ y'=\beta x+\alpha y+k, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} \neq 0.$$

若置 $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，则(3)可写作

$$\begin{cases} x'=r(x\cos\theta-y\sin\theta)+h, \\ y'=r(x\sin\theta+y\cos\theta)+k, \end{cases}$$

系数矩阵是 $\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$，它的行列式是 $D=r^2>0$.

在正交笛卡尔坐标系下，(3)式表示一个相似变换，因若设两点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)间的距离为 d，而映象点(x_1',y_1')，(x_2',y_2')间的距离为 d'，则有

$$d'^2=(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2=$$
$$(\alpha^2+\beta^2)\ [(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=r^2d^2,$$

即 $$d'=rd.$$

亦即经过变换(3)，所有的距离按定常数 r 放大或缩小，图形变换为相似形，因而角度保留不变. r 称为*相似比*.

上面要求仿射变换(2)保留虚圆点 I, J 得出(3). 若要求(2)将 I 与 J 相互转换，仿此(见习题 5.19)得出

$$(3') \qquad \begin{cases} x'=\alpha x+\beta y+h=r(x\cos\theta+y\sin\theta)+h, \\ y'=\beta x-\alpha y+k=r(x\sin\theta-y\cos\theta)+k, \end{cases}$$

系数矩阵的行列式是 $D'=-r^2<0$. 跟上面的情况一样，距离也按常数 r 放大或缩小. 但有一点不同，变换(3′)是变换

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases} \quad \text{(这是关于 } x \text{ 轴的反射或对称变换)}$$

跟(3)的一个乘积，所以(3′)改变了图形的转向. 所以称为*反相似变换*，而称(3)为*正相似变换*.

若进一步有 $r=1$，则(3)，(3′)分别成为

$$(4) \quad \begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta+h, \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta+k, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=+1;$$

$$(4') \quad \begin{cases} x'=x\cos\theta+y\sin\theta+h, \\ y'=x\sin\theta-y\cos\theta+k, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix}=-1.$$

前者称为*运动*；后者是一个反射跟运动之积，它改变图形的转向；两者合称*合同变换*或*正交变换*. (4)保留图形的转向，(4′)改变图形的转向.

5.9 变 换 群

几何学中所研究的变换，一般不是孤零单个的，而是一个集合中的一员. 十九世纪后半叶(1872)，德国数学家克莱因(F. Klein)曾从变换群的观点来定义各种几何学. 这个观点使几何学发展了一系列的新方向.

由前所述，射影变换式是

$$\rho x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \qquad (i=1,2,3),\ |a_{ij}| \neq 0.$$

这里有九个参数，因此所表示的变换有无限多个，这无限多个变换属于一个群. 我们来阐明群的意义.

我们知道，变换就是一宗对应或映射，使所考虑的空间内一点 A 与同一空间内一个唯一的点 A' 对应. 如果以文字 T 表示变换，这个对应可记以

$$A' = T(A) = TA.$$

设变换 T 将 A 点变为 A' 点，即 $T(A)=A'$，而变换 T' 将点 A' 变为 A''，即 $T'(A')=A''$，那末我们说变换 T 和变换 T' 的乘积将 A 变为 A'':

$$T'[T(A)] = T'(A') = A''.$$

这乘积用符号表达就记为 $T'T$（注意书写的顺序与做变换的顺序相反）.

注意在乘积中，一般不能互换两个因子的顺序（参看习题 1.23），即 $T'T \neq TT'$，即交换律一般不满足.

但结合律恒满足，即

$$T''(T'T) = (T''T')T.$$

因若设 $T(A)=A'$, $T'(A')=A''$, $T''(A'')=A'''$，则

(i) $T'T(A) = T'[T(A)] = T'(A') = A''$，从而

$$T''(T'T)(A) = T''(A'') = A''';$$

(ii) $(T''T')T(A) = (T''T')(A') = T''[T'(A')]$

$$= T''(A'') = A'''.$$

所以变换 $T''(T'T)$ 和 $(T''T')T$ 有相同的作用，只跟因子的顺序有关，而与因子的结合无关. 因此可以把这个乘积无歧义地写作为 $T''T'T$.

如果对上述变换再加一条件，即对于所考虑的空间内每一个

映象点 A'，只有一个原象点 A 和它对应，这种变换称为一对一的变换，或可逆变换. 凡可逆变换一定具有一个逆变换. 以 T^{-1} 表示 T 的逆变换，则

$$T(A)=A',T^{-1}(A')=A.$$

幺变换或恒同变换将每一点变为其自身，以 I 表示. 从定义，

$$IT=T, TI=T,$$

$$T^{-1}T=I, TT^{-1}=I.$$

有了上述准备，我们来给变换群的定义：

定义 满足下列二条件的变换所成的集合称为变换群：

(i) 集合内任二变换之积仍属于这集合；

(ii) 集合内任一变换有逆变换，且逆变换仍属于这集合.

这个关于变换群的定义和代数里抽象群的定义并无不合. 因为变换之积总是满足结合律的，所以抽象群定义的这一要求不必提出. 并且每一变换 T 既要求有逆变换 T^{-1}，且要求它属于集合，则乘积 $TT^{-1}=I$ 也就在集合内，所以抽象群定义中的单位元此地也不必提出.

5.10 变换群的例证

现在来证明一切射影变换构成一个群，称为射影变换群.

先来检验变换群的条件(i) 是否满足. 设在一切射影变换所构成的集合里任取一个变换 T_1，使点 x 变为点 x'：

$$T_1: \qquad \rho x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j,\ |a_{ij}|\neq 0,$$

再在集合里任取一变换 T_2 使点 x' 变为点 x''：

$$T_2: \qquad \sigma x''_k=\sum_{i=1}^{3}b_{ki}x'_i,\ |b_{ki}|\neq 0.$$

那末 T_1 与 T_2 之积 T_2T_1 就将点 x 变为 x''，它的形式是

$$\rho\sigma x''_k = \sum_i b_{ki}(\rho x'_i) = \sum_i b_{ki}\left(\sum_j a_{ij}x_j\right)$$
$$= \sum_j\left(\sum_i b_{ki}a_{ij}\right)x_j.$$

置 $c_{kj} = \sum_i b_{ki}a_{ij}$，则

$$T_2T_1: \quad \rho\sigma x''_k = \sum_j c_{kj}x_j.$$

且由矩阵乘法规律

$$|c_{kj}| = |b_{ki}|\cdot|a_{ij}| \neq 0.$$

这说明 T_2T_1 仍为一射影变换．条件(i)满足．

其次，条件(ii)也满足，任一射影变换 T_1 的逆变换存在，且仍为一射影变换：

$$T_1^{-1}: \qquad \sigma x_i = \sum_j A_{ji}x'_j, \quad |A_{ji}| = |a_{ji}|^2 \neq 0.$$

证完．

同样，仿射变换的集合

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_0, \\ y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

构成群，称为仿射变换群；5.8 节的相似变换(3)和(3′)合在一起构成相似群；运动变换的集合

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + h, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + k, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = +1$$

构成群，称为运动变换群．

5.11 变换群与几何学

1872 年克莱因在爱耳兰根 (Erlangen) 大学宣读了现在大家

叫做“爱耳兰根纲领”的演说.在这篇论文中他总结了射影、仿射以及其它几何的发展结果,明确地表述了构成这些几何的普遍原则,那就是说可以考虑空间的一一变换的任何一个群,而且研究在这个群的一切变换下保留不变的图形性质.

因此,运动群下图形的不变性质的研究,就构成欧几里得几何;仿射群下图形的不变性质的研究就构成仿射几何;射影群下图形的不变性质的研究就构成射影几何;等等.

这里须要注意,所谓一个变换群下的不变性质,乃是指被这个群的一切变换保留不变的性质.举例来说,虽说有一些中心射影将圆投射为圆,但并非所有的中心射影将圆投射为圆,因而圆不是射影几何的对象.同样,尽管有些仿射变换将圆变为圆,但一般说来圆的仿射映象却是椭圆,所以圆也不是仿射几何的对象.相反的,经过任何相似变换,圆都变成圆.即圆是相似群下的不变性质,所以圆是相似几何(包括欧氏几何作为它的部分)的对象.

由于仿射群是射影群的子群,运动群又是仿射群的子群,所以欧氏几何是仿射几何的子几何,仿射几何又是射影几何的子几何.可以说,如果说在1822年庞斯雷(Poncelet)建立近代射影几何的时候,射影几何只不过欧氏几何的一章,那末当克莱因提出新的观点以后,倒转来从几何学的范围来说,欧氏几何又只是射影几何的一章了,当然内容更丰富.

作为本章的结束,我们把欧氏、仿射、射影几何之间的比较,列表见下页.

对此表需要解释一点,即射影变换式含9个系数 a_{ij},却说参数数目是8,这是什么原因呢?这是因为9个系数不可能同为零,重要的并不是这9个数,而是它们的相互比值(以同一数除三式,由于使用的是齐次坐标,结果所表达的仍是同一点),所以独立参数数目是8.

	射影几何	仿射几何	欧氏几何
相应的变换群	射影变换群	仿射变换群	运动变换群
变换式	$\rho x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j$ $(i=1,2,3)$ $\lvert a_{ij}\rvert\neq 0$	$x'=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_0$ $y'=\beta_1x+\beta_2y+\beta_0$ $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0$	$x'=x\cos\theta-y\sin\theta+h$ $y'=x\sin\theta+y\cos\theta+k$ $\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1$
参数数目	8	6	3
基本不变性质	接合性	接合性，平行性	接合性，平行性，正交性
基本不变量	交比	简比	距离，角度
基本不变图形	——	无穷远直线	无穷远直线，虚圆点

习 题

5.1 将一维笛氏坐标与射影坐标的关系

$$\lambda=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$$以齐次坐标表达.

5.2 在直线上取笛氏坐标为 2, 0, 3 的三点作为射影坐标系的 A_1, A_2, E. (i) 求此直线上任一点 P 的笛氏坐标 x 与影射坐标 λ 间的关系；(ii) 问有没有一点，它的两种坐标相等?

5.3 直线上的 P 点在坐标系(A_1, A_2, E)下的齐次射影坐标为 (x_1, x_2)，在坐标系(A'_1, A'_2, E')下的射影坐标为(x'_1, x'_2)；试求(x_1, x_2)和(x'_1, x'_2)间的转换式.

5.4 在二维射影坐标系下，求直线 A_1E, A_2E, A_3E 的方程和坐标.

5.5 写出分别通过坐标三角形的顶点 A_1, A_2, A_3 的直线方程.

5.6 试证适当地选择坐标系时，三角形的内心和三个旁心的坐标可分别写为$(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$.

5.7 证明选坐标三角形的内心为单位点时，三角形垂心的坐标可写为$(\cos A_2\cos A_3, \cos A_3\cos A_1, \cos A_1\cos A_2)$.

5.8　取笛氏坐标系下三直线 $x-y=0, x+y-1=0$, $x-2=0$ 分别作为坐标三角形的边 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. 取 $E\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$为单位点, 求一点的射影坐标$(x_1, x_2, x_3)$与笛氏坐标$(x, y, t)$间的关系.

5.9　从坐标变换式

$$\begin{cases}\rho x'_1=-x_1+x_2+x_3,\\ \rho x'_2=x_1-x_2+x_3,\\ \rho x'_3=x_1+x_2-x_3,\end{cases}$$

求出每一坐标三角形的三边在另一坐标系下的方程.

5.10　若有两个坐标系, 同以 $\triangle A_1A_2A_3$ 为坐标三角形, 但单位点不同, 那末两种坐标间的转换式为何?

5.11　求一个射影变换, 使点(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1) 分别变为点(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1).

5.12　在拓广欧氏平面上求平移

$$\begin{cases}x'=x+a\\ y'=y+b\end{cases}$$

的二重元素.

5.13　在拓广欧氏平面上求旋转

$$\begin{cases}x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha\\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{cases}\qquad(\alpha\neq0,\pi)$$

的二重元素.

5.14　若一射影变换使得不共线的三点不变时, 那末这个变换式可写为

$\rho x'_1=ax_1$, $\rho x'_2=bx_2$, $\rho x'_3=cx_3$ $(abc\neq0)$.

5.15　求射影变换 $\rho x'_1=-x_1$, $\rho x'_2=x_2$, $\rho x'_3=x_3$ 的二重元素.

5.16　求射影变换 $\rho x'_1=x_1+x_2$, $\rho x'_2=x_2$, $\rho x'_3=x_3$ 的二重元素.

5.17　求射影变换$\rho x'_1=4x_1-x_2$, $\rho x'_2=6x_1-3x_2$, $\rho x'_3=x_1-x_2-x_3$的二重元素.

5.18　证明射影变换 $\rho x'_1=ax_1+x_2$, $\rho x'_2=ax_2+x_3$, $\rho x'_3=ax_3$只有一个二重点及通过该点的一条二重直线.

5.19　在笛氏坐标系下, 互换两点 $I(1, i, 0)$和 $J(1, -i, 0)$ 的射影变换称为反相似变换, 求反相似变换的表达式.

5.20　(*i*) 求变换 $x'=\dfrac{x}{2x-1}$, $y'=\dfrac{y}{2x-1}$的二重点; (*ii*)设 O 为原点,

P 为直线 $x=1$ 上任一点，M' 为直线 OP 上一点 M 的对应点，求交比 (OP, MM')；(iii) 从这个交比值得出什么结论？解出逆变换式以验证这结论.

5.21　试用一个实际例子说明两个变换之积是不满足交换律的.

5.22　求证 $(RST)^{-1}=T^{-1}S^{-1}R^{-1}$，这里的 R, S, T 表示变换.

5.23　证明一直线上非奇异射影变换 $\rho x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2$, $\rho x_2'=a_{21}x_1+a_{22}x_2$ $(A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0)$ 的全体构成群，其中 $A>0$ 的全体变换也构成群，$A<0$ 的全体变换是否构成群？

5.24　5.4 节的反相似变换 (3') 的集合是否构成群？

5.25　平面上关于直线的对称变换的集合是否构成群？平面上关于点的对称变换的集合是否构成群？

5.26　证明绕原点的全体旋转变换构成群.

5.27　平面上有无三点共线的五点 A、B、C、F、G，设

$$\begin{cases} AF \text{ 交 } BC \text{ 于 } A_1, \\ BF \text{ 交 } CA \text{ 于 } B_1, \\ CF \text{ 交 } AB \text{ 于 } C_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1G \text{ 交 } B_1C_1 \text{ 于 } A_2, \\ B_1G \text{ 交 } C_1A_1 \text{ 于 } B_2, \\ C_1G \text{ 交 } A_1B_1 \text{ 于 } C_2. \end{cases}$$

求证三直线 AA_2、BB_2、CC_2 共点.（建议：取 A、B、C 作坐标三角形顶点，取 F 作单位点.）

第六章　二次曲线的射影性质

在上一章射影坐标和射影变换的基础上，我们来介绍二次曲线的射影性质．中心内容是二阶曲线和二级曲线的定义，巴斯卡(Pascal)定理和布利安双(Brianchon)定理，极与极线的理论．附带从几何学的角度由二次曲线束的理论来阐明代数上解二元二次联立方程组的基本观点．

6.1 二阶曲线与二级曲线

定义　满足二次方程

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{13}x_1x_3=0$$

(或简写为 $\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0$, $a_{ij}=a_{ji}$)的全体点(x_1, x_2, x_3)称为二阶曲线．二阶曲线看作点的轨迹．

满足二次方程

$$b_{11}u_1^2+b_{22}u_2^2+b_{33}u_3^2+2b_{12}u_1u_2+2b_{23}u_2u_3+2b_{13}u_1u_3=0$$

(或简写为 $\sum_{i,j=1}^{3}b_{ij}u_iu_j=0$, $b_{ij}=b_{ji}$)的全体直线(u_1, u_2, u_3)称为二级曲线．二级曲线看作直线的包络．

定理 1　有两个不共心的射影线束，对应线交点的全体连同这两个线束的心组成一条二阶曲线．

有两个不共底的射影点列，对应点联线的全体连同这两个点列的底组成一条二级曲线．

我们证明左边的定理．

设两个线束的方程为

$$G+\mu H=0,\qquad G'+\mu' H'=0,$$

其中 G, H, G', H' 是 x_1, x_2, x_3 的一次齐次式，例如说 $G=g_1x_1+g_2x_2+g_3x_3$, $H=h_1x_1+h_2x_2+h_3x_3$，等等．并且由于两线束成射影

对应，所以有

$$\mu' = \frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}, \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0.$$

从上两式解出 μ 和 μ'，代入这一式得

$$-\frac{G'}{H'} = \frac{\beta H-\alpha G}{\delta H-\gamma G},$$

或

$$G'(\delta H-\gamma G)+H'(\beta H-\alpha G)=0.$$

这式左端是 x_1, x_2, x_3 的二次齐式，所以按定义，两射影线束对应线交点的轨迹是一条二阶曲线．并且 $G=0, H=0$ 满足上述方程，即第一线束中心是二阶曲线上的一点．同理第二线束中心也是这二阶曲线上一点．

定理 2 设有一条二阶曲线，它是由两个射影线束对应线的交点构成的；设 A, B 为这曲线上两定点，M 为其上一动点，则两线束 $A\{M\}$ 与 $B\{M\}$ 成射影对应．（参看习题 3.18）

设有一条二级曲线，它是由两个射影点列对应点的联线构成的；设 a, b 为这曲线的两条定线，m 为它的一条动直线，则两点列 $a\{m\}$ 与 $b\{m\}$ 成射影对应．（参看习题 3.21）

我们证明左边的定理，这定理的意思是说，一条二阶曲线可以取其上任两点为两射影线束中心，以产生这曲线．设二阶曲线是由两个射影线束 $O\{P\}$ 和 $O'\{P\}$（图 6.1）产生的，A 和 B 是其上两定点，M 是其上一动点，要证明 $A\{M\}\barwedge B\{M\}$．

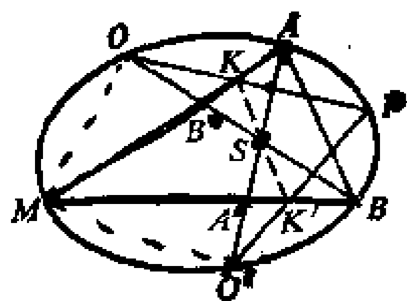


图 6.1

设 $K=OP\times AM$, $S=O'A\times OB$, $K'=BM\times O'P$, $B'=OB\times AM$, $A'=O'A\times BM$.

那末由假设

$$O(ABPM)\barwedge O'(ABPM).$$

分别以直线 AM 和 BM 截这两线束，得

$$(AB'KM)\barwedge(A'BK'M).$$

由于这两直线的公共点 M 对应于自身，由 3.5 节定理 2，

$$(AB'KM)\overline{\barwedge}(A'BK'M).$$

于是由透视定义，三直线 AA'，$B'B$，KK' 共点，即是说三点 K，K'，S 共线。

现在让五点 O, O', A, B, P 固定不动，而 M 点在二阶曲线上变动，这时不论 M 点的位置如何，三点 K, S, K' 总是共线的．所以

$$A\{M\}\overline{\barwedge}OP\text{ 上的点列}\{K\}\overset{S}{\overline{\barwedge}}O'P\text{ 上的点列}\{K'\}\overline{\barwedge}B\{M\},$$

从而证到 $A\{M\}\barwedge B\{M\}$。

定理 3 给定无三点共线的任意五点，可决定一条也仅仅一条二阶曲线。

给定无三线共点的任意五条直线，可决定一条而且也仅仅一条二级曲线。

仍证明互为对偶的两定理的左边一个．设已知五点为 O, O'，A，B, C．以其中任意两点例如 O 和 O' 为心，分别联线 OA，OB，OC 与 $O'A, O'B, O'C$．由一维射影几何基本定理(3.4 节定理 4)，三对对应线 OA 与 $O'A$，OB 与 $O'B$，OC 与 $O'C$ 决定唯一的射影对应，从而决定了唯一的一条二阶曲线通过已知的五点(定理 1)．由定理 2，知道这样决定的曲线，不因哪两点取为线束的中心而改变．

定理 4 二阶曲线上四定点与其上任意第五点所联四直线的交比(倘若这交比有意义)为常数．

二级曲线的四条定直线与它的任意第五条直线相交所得四点的交比(倘若这交比有意义)为常数．

仍证左边的定理．设四定点以 A, B, C, D 表示，并以 E 和 E' 表示第五点的两个位置．取 E 和 E' 作为两个射影线束的中心以

产生这二阶曲线，则 $E(A,B,C,D)\barwedge E'(A,B,C,D)$ 从而 $E(AB,CD)=E'(AB,CD)$. 即是说四直线所成交比，不因第五点的位置而变，故为一常数.

6.2 二次曲线的射影定义

定义 二阶曲线就是两个射影线束对应直线交点的全体.

二级曲线就是两个射影点列对应点联线的全体.

由于射影对应可分为透视对应与非透视对应两种，如果专就透视的射影对应而言，我们有下述定义.

定义 两个透视对应线束中，对应直线交点的全体称为变态的二阶曲线.

注意：联接两个心的直线既属于第一线束，又属于第二线束，它是自身对应的，所以这联线上任一点都可以看作是交点. 因此变态的二阶曲线是两条直线(点列)，其中一条即此联线，另一条就是对应直线交点所在的直线（图 6.2a）. 在极限情况，这两直线可重合为一直线.

两个透视对应点列中，对应点联线的全体称为变态的二级曲线.

注意：两个底的交点既属于第一点列，又属于第二点列，它是自身对应的，所以过这交点的任一直线都可以看作是联线. 因此变态的二级曲线是两个点(线束)，其中一个即此交点，另一个就是其它对应点联线所交的那个点（图 6.2b）. 在极限情况下，这两点可重合为一点.

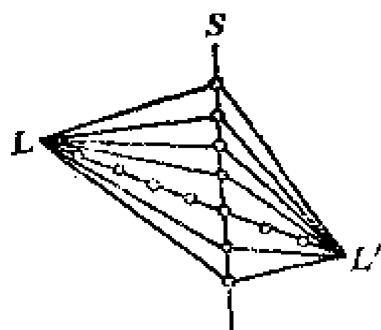


图 6.2a

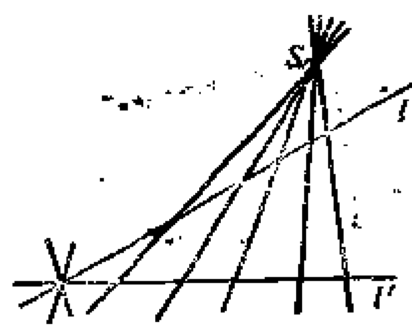


图 6.2b

和变态二阶曲线与变态二级曲线相反的，有常态二阶曲线与

常态二级曲线.

定义　有两个非透视的不共心的射影对应线束，其对应线交点的全体称为常态二阶曲线.

有两个非透视的不共底的射影对应点列，其对应点联线的全体称为常态二级曲线.

以后(6.5节定理2)将证明：常态二阶曲线与常态二级曲线间有下述关系.

定理　常态二阶曲线的切线全体组成常态二级曲线.

常态二级曲线的切点全体组成常态二阶曲线

6.3　巴斯卡与布利安双定理

根据二次曲线的射影定义，有以下两个互为对偶的著名定理.

巴斯卡定理　设一六角形内接于一条二次曲线，那末它的三双对边的交点共线(巴斯卡线).

设1, 2, 3, 4, 5, 6是内接六角形的六个顶点(图6.3*a*)，则边12与45，23与56，34与61称为三双对边，现证三双对边的交点I, II, III共线.

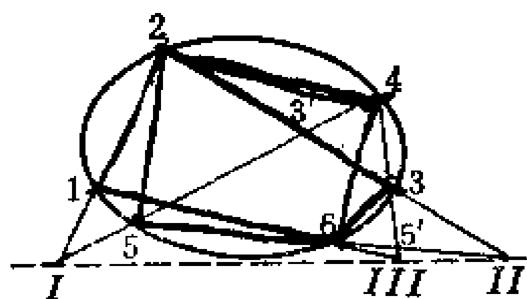


图　6.3*a*

以点2和6为心分别联接

布利安双定理　设一六边形外切于一条二次曲线，那末它的三双对顶的联线共点(布利安双点).

设1, 2, 3, 4, 5, 6是外切六边形的六条边(图6.3*b*)，则顶点12与45，23与56，34与61称为三双对顶. 现证三双对顶的联线I, II, III共点.

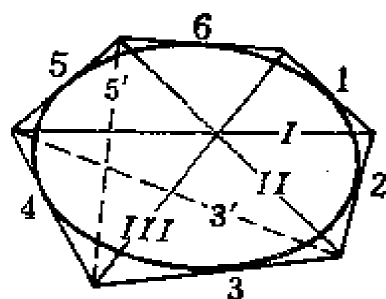


图　6.3*b*

以直线2和6为底分别去

其它四点，得到

$2(4351)\,\overline{\wedge}\,6(4351)$. 但 $2(4351)\overset{45}{\underset{\wedge}{=}}(43'5\mathrm{I})$，这里 3′ 是直线 23 与 45 的交点，而且

$6(4351)\overset{34}{\underset{\wedge}{=}}(435'\mathrm{III})$，这里5′ 是直线 65 与 34 的交点. 把上面三回射影对应联系起来，得到

$(43'5\mathrm{I})\,\overline{\wedge}\,(435'\mathrm{III})$.

由于点 4 自身对应，所以

$(43'5\mathrm{I})\,\overline{\overline{\wedge}}\,(435'\mathrm{III})$.

因此三直线33′, 55′, I III交于一点，即是说 33′ 与 55′ 的交点 II 在直线 I III 上.

(注意：定理 2(6.1 节)所证三点 K, K', S 共线，即是本定理.)

截其他四线，得到

$2(4351)\,\overline{\wedge}\,6(4351)$. 但 $2(4351)\overset{45}{\underset{\wedge}{=}}(43'5\mathrm{I})$，这里 3′ 是点 23 与 45 的联线，而且

$6(4351)\overset{34}{\underset{\wedge}{=}}(435'\mathrm{III})$，

这里5′ 是点 65 与 34 的联线. 把上面三回射影对应联系起来，得到

$(43'5\mathrm{I})\,\overline{\wedge}\,(435'\mathrm{III})$.

由于直线 4 自身对应，所以

$(43'5\mathrm{I})\,\overline{\overline{\wedge}}\,(435'\mathrm{III})$.

因此三点 33′, 55′, I III 在一直线上，即是说 33′ 与55′ 的联线II 通过点 I III.

证 完

逆定理 若六角形的三双对边的交点共线，那末这六角形内接于一二次曲线.

若六边形三双对顶的联线共点，那末这六边形外切于一二次曲线.

我们以巴斯卡定理的逆定理为例证之.

设 1 2 3 4 5 6 为一六角形(图 6.3a)，对边 12 与 45 的交点是 I, 23 与 56 的交点是 II, 34 与 61 的交点是 III，并且三点 I, II, III 共线. 又以 3′ 表示直线 45 和 23 的交点，以 5′ 表示 34 和 65 的交点.

由假设可知直线 33′, 55′, I III 共点，所以

$$(43'5\mathrm{I})\,\overline{\overline{\wedge}}\,(435'\mathrm{III}).$$

但

$$(43'5\mathrm{I})\overline{\wedge}2(43'5\mathrm{I}),$$

$$(435'\mathrm{III})\overline{\wedge}6(435'\mathrm{III});$$

所以

$$2(43'5\mathrm{I})\overline{\wedge}6(435'\mathrm{III}),$$

亦即

$$2(4351)\overline{\wedge}6(4351).$$

因此有一条二次曲线通过六点 1, 2, 3, 4, 5, 6. 证完.

巴斯卡与布利安双定理的特殊情况

(1) 若将变态二阶曲线与变态二级曲线合称为变态二次曲线，而且看作是常态二次曲线的特殊情况时，那末从巴斯卡定理与布利安双定理直接推出巴卜斯定理及其对偶定理(图 6.4*a* 和 6.4*b*).

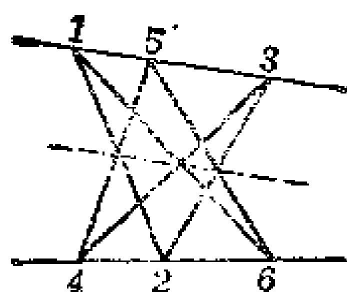


图　6.4*a*

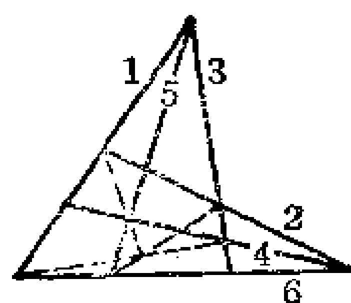


图　6.4*b*

(2) 在常态情况如果令两相邻的元素重合，例如 5≡6, 那末

六角形变成五角形，边 56 变为点 5 处的切线，因此有：

设一五角形内接于一二次曲线，则一边与其对顶的切线的交点，以及其余两对不相邻的边的交点共线(图 6.5*a*).

六边形变成五边形，点 56 变成直线 5 上的切点，因此有：

设一五边形外切于一二次曲线，则一顶点与其对边上切点的联线，以及其余两对不相邻的顶点的联线共点(图 6.5*b*).

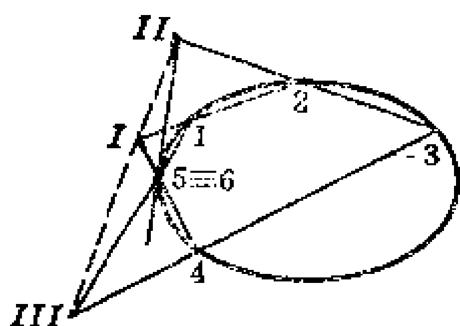


图 6.5a

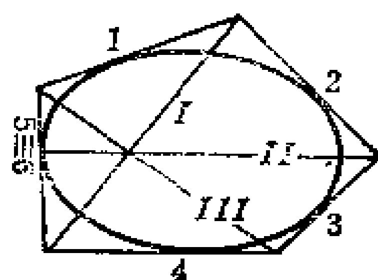


图 6.5b

(3) 如果让三对相邻的元素重合，例如 $1\equiv 2, 3\equiv 4, 5\equiv 6$，那末便有

设一三角形内接于一二次曲线，则其三边与对顶处的切线的三交点共线(图 6.6a)．

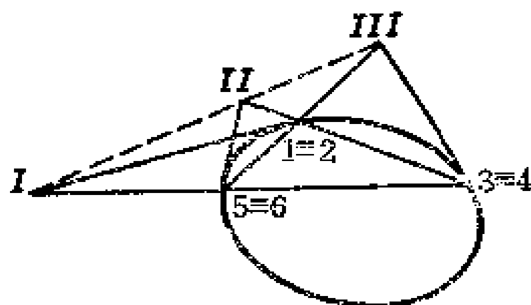


图 6.6a

设一三边形外切于一二次曲线，则其三顶点与对边上切点的三条联线共点(图 6.6b)．

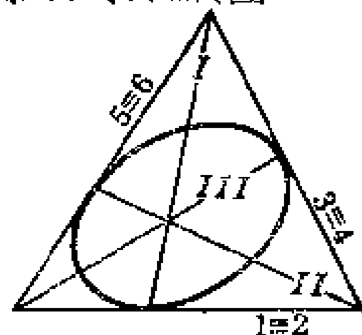


图 6.6b

6.4 关于二次曲线的极与极线

设二次曲线 Γ 的方程为

$$\Gamma: \ a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3 +2a_{13}x_1x_3=0,$$

或 $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j=0$, $a_{ij}=a_{ji}$, a_{ij} 为实数．

我们假设 Γ 是常态的，即不退化为两直线，即系数矩阵 (a_{ij}) 的秩为 3，或 $|a_{ij}|\neq 0$．

让我们求不在 Γ 上的两已知点 y 与 z 的联线和 Γ 的交点．联

线上任一点可写为

$$\rho x_i = y_i + \lambda z_i \qquad (i=1,2,3).$$

若此点在Γ上，则其坐标 x_i 应满足Γ的方程：

$$0=\rho^2\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j=\Sigma a_{ij}(y_i+\lambda z_i)(y_j+\lambda z_j)$$

$$=\Sigma a_{ij}y_iy_j+2\lambda\Sigma a_{ij}y_iz_j+\lambda^2\Sigma a_{ij}z_iz_j,$$

这是 λ 的一个二次方程，以 λ_1, λ_2 表其两根，于是有两个交点

$$\begin{aligned} P_1:\quad \rho_1x_i&=y_i+\lambda_1z_i,\\ P_2:\quad \rho_2x_i&=y_i+\lambda_2z_i, \end{aligned}\quad (i=1,2,3).$$

四点 y, z, P_1, P_2 所成的交比是

$$(yz, P_1P_2)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

定义 如果两点 y, z 的联线被它和Γ的交点 P_1, P_2 所调和分割，则称两点 y, z 关于二次曲线Γ成共轭点。

定理 1 不在Γ上的两点 y，z 关于二次曲线 $\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$ 成共轭的条件是

$$\Sigma a_{ij}y_iz_j=0.$$

证明 共轭条件是 $(yz, P_1P_2)=-1$，或 $\lambda_1+\lambda_2=0$. 但 λ_1，λ_2 是二次方程

$\lambda^2\Sigma a_{ij}z_iz_j+2\lambda\Sigma a_{ij}y_iz_j+\Sigma a_{ij}y_iy_j=0$ 的根，利用根与系数的关系，所求条件即 $\Sigma a_{ij}y_iz_j=0$. 由于 $a_{ij}=a_{ji}$，这关系也可写作 $\Sigma a_{ij}z_iy_j=0$，表明 y 和 z 两点的地位是对称的. 证完.

定理 2 通过一已知点 y 引诸直线，这些直线与Γ的每一对交点有 y 的一个调和共轭点，即 y 关于Γ的一个共轭点. 这些共轭点的轨迹是一条直线，称为点 y 的极线，点 y 称为这直线的极.

证明 在定理1的共轭条件中，把 y 看作定点的坐标，而把 z 看作动点的坐标，就见 z 点的轨迹为一直线，其方程为

$$\sum a_{ij}y_iz_j=0,$$

写出来(利用 $a_{ij}=a_{ji}$)即

$$(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)z_1+(a_{21}y_1+a_{22}y_2$$
$$+a_{23}y_3)z_2+(a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3)z_3=0.$$

证完.

定理 3 若点 y 的极线通过点 z，则点 z 的极线也通过点 y.

证明 由假设，点 y 的极线通过点 z，即点 z 是点 y 的诸共轭点之一，因而倒转来，点 y 也是点 z 的诸共轭点之一．所以点 z 的极线也通过点 y.

定理 4 设点 z 在点 y 的极线上移动，那末点 z 的极线绕点 y 而转动．即是说，在极与极线的对应中，点与直线对应，点列与线束对应.

这是定理 3 的推论.

定理 5 若一点 y 在它自身的极线上(即 y 是**自共轭点**)，则 y 在二次曲线上．反过来也成立.

证明 因点 y 的极线通过点 y 本身．所以它的坐标满足它的极线的方程 $\sum a_{ij}y_ix_j=0$，即是说我们有 $\sum a_{ij}y_iy_j=0$，此式表明点 y 在 Γ 上.

反之，若点 y 在 Γ 上，即设 $\sum a_{ij}y_iy_j=0$，那末点 y 的坐标满足它的极线的方程，因而在这极线上.

定理 6 设点 y 在 Γ 上，那末它的极线就是 Γ 在点 y 的切线.

证明 由假设，点 y 在 Γ 上，所以 $\sum a_{ij}y_iy_j=0$，现在以 z 表示 y 关于 Γ 的许多共轭点中的一个，则有 $\sum a_{ij}y_iz_j=0$．让我们来求点 y 和 z 的联线与 Γ 的两个交点 P_1, P_2．根据本节一开始的说明，这样的点可写作

$$\begin{matrix} P_1: & \rho_1x_i=y_i+\lambda_1z_i, \\ P_2: & \rho_2x_i=y_i+\lambda_2z_i, \end{matrix} \quad (i=1,2,3,),$$

其中 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2\Sigma a_{ij}z_iz_j+2\lambda\Sigma a_{ij}y_iz_j+\Sigma a_{ij}y_iy_j=0$ 的根，在现在的条件下，这方程变为 $\lambda^2\Sigma a_{ij}z_iz_j=0$，因此 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

这意思是说，任何一点与 y 共轭时，它和点 y 的联线跟 Γ 相交于两个重合点，而此点即 y 本身（图 6.7）．可见 y 的一切共轭点在以点 y 为切点的切线上．证完．

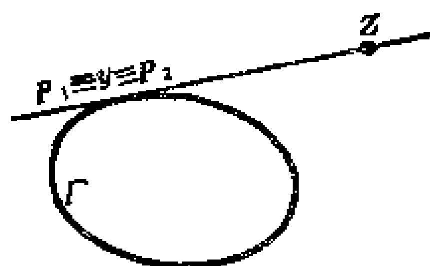


图 6.7

这定理表明，二次曲线的切点与切线的关系，正好是极与极线关系的特殊情况．附带得出下面的系：

系 1　设 y 为 Γ：$\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$ 上一点，则 Γ 在这点的切线方程为

$$\Sigma a_{ij}y_ix_j=0.$$

系 2　Γ 上任一点 y，与 Γ 在点 y 的切线上任一点 z 对于 Γ 成共轭．

我们推导的结果，适用于一切射影坐标，因此也适用于射影坐标的特例笛氏坐标．

以下考虑关于二次曲线的极与极线的作图问题．

I.　求作一已知点的极线．

以 P 表已知点，p 表所求极线．

若 P 在 Γ 上，只要作 Γ 在 P 点的切线就得到极线 p，这作法请读者在学了这里的两个作图题以后自行设计．

若 P 不在 Γ 上（不论在 Γ 内部或外部，作法相同），通过 P 点任引两直线使与 Γ 分别交于 A, B 及 C, D（图 6.8）．设 $Q=AC\times BD$，$R=AD\times BC$，那末 QR 就是所求的极线 p.

因为设 $E=QR\times AB$，$F=QR\times CD$，那末由完全四点形或完全四线形的调和性质，我们有 $(PE, AB)=-1$，$(PF, CD)=-1$，所

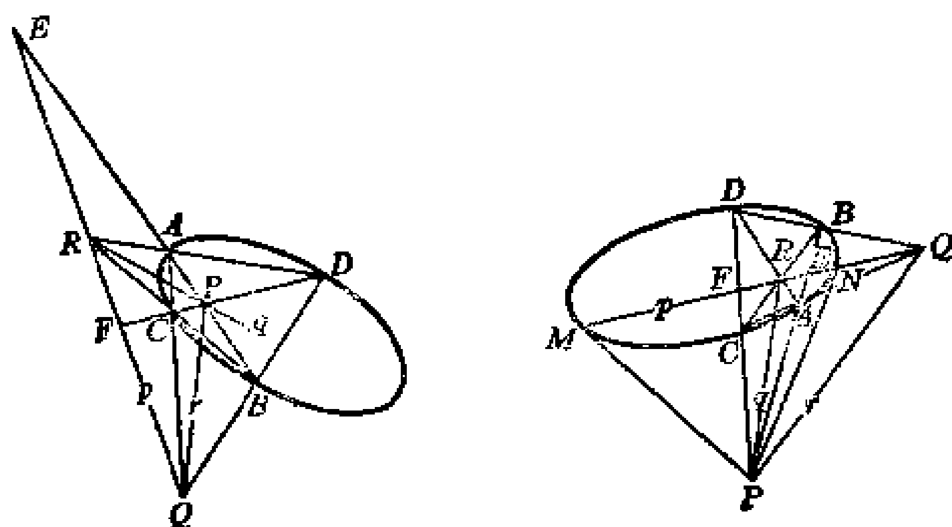


图 6.8

以由共轭点的定义，E 和 F 是 P 的两个共轭点，从而直线 EF（即 QR）就是 P 点的极线。

从这里还可以指出两个重要结果：第一，若 P 在 Γ 外部，p 与 Γ 交于两点 M, N。这两点在 p 上，所以与 P 共轭。但 M 在 Γ 上，因而由定理 6，与 M 共轭的 P 点在 M 点的切线上，可见 PM 是切线。同理 PN 也是切线。可见从一个外部点的极线的作图，立刻得出由该点向 Γ 所引两条切线的作图，这作图只用了直尺。

第二，观察 $\triangle PQR$，已经知道 Q 和 R 在 p 上，所以和 P 共轭。若将上面的作法解释为求 Q 点的极线的作图，立见 PR 就是 Q 点的极线 q，即 Q 和 R 也共轭，从而 R 点的极线 r 就是 R 点的两个共轭点 P 和 Q 的联线。这个三角形 PQR 的每一顶点和余二顶点共轭，从而每一顶点和它的对边是极与极线的关系。这样的三角形称为关于 Γ 的自极三角形。这个极为重要的概念以后还要阐述。

II. 求作一已知直线 p 的极 P。

解决了问题 I 以后，这个问题便迎刃而解了，在已知线 p 上任取两点 Q 和 R，按上述方法作其极线 q 和 r（图 6.9），则 P 即为点 $q\times r$。因为这点既在 q 上又在 r 上，所以既与 Q 共轭，又与 R 共轭，因而这点的极线是 $QR=p$，或者说点 $q\times r$ 是 P 的极。

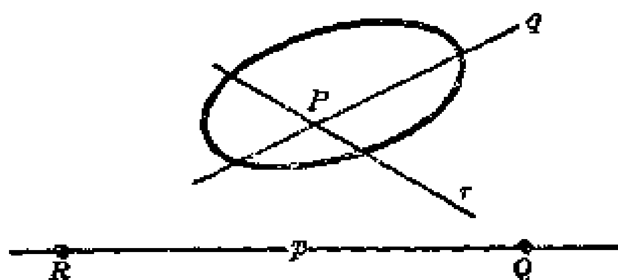


图　6.9

6.5 配 极 对 应

设有一二次曲线

$$\sum a_{ij}x_ix_j=0 \qquad (a_{ij}=a_{ji}),$$

仍假设它是常态的，即设$|a_{ij}|\neq 0$.

设x为一已知点，以X表示x点的极线上点的流动坐标矢量，则点x的极线方程为$\sum a_{ij}x_iX_j=0$，写出来就是

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)X_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)X_2$$
$$+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)X_3=0.$$

这极线的坐标是

$$(1)\qquad \begin{cases}\rho u_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \rho u_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \rho u_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\end{cases}$$

由于$|a_{ij}|\neq 0$，从(1)式解出x_1, x_2, x_3得

$$(2)\quad \begin{cases}\sigma x_1=A_{11}u_1+A_{21}u_2+A_{31}u_3,\\ \sigma x_2=A_{12}u_1+A_{22}u_2+A_{32}u_3, \quad A_{ij}=A_{ji},\ |A_{ij}|=|a_{ij}|^2\neq 0.\\ \sigma x_3=A_{13}u_1+A_{23}u_2+A_{33}u_3.\end{cases}$$

从(1)和(2)可知，给定一点，有一条直线(已知点的极线)和它对应；反之，给定一直线，有一点(已知直线的极)和它对应．这种对应称为关于二次曲线Γ的配极对应，表达式即(1)与(2).

配极对应使得以点为元素的图形转变为以直线为元素的几何

图形，同时使以直线为元素的图形转变为以点为元素的几何图形．按配极对应互相转变的两个图形，称为互为配极图形．例如四点形对于一二次曲线的配极图形是四线形，四线形的配极图形是四点形．配极对应不但使图形转变为对偶图形，而且还使射影性质转变为对偶性质．为了说明这一点，我们证明下述定理．

定理 1 在配极对应下，点列与线束之间的对应（6.4 节定理 4）是射影的．

证明 设通过配极对应，点 y 和 z 分别转变为直线 v 和 w，即

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 v_i=\sum_j a_{ij}y_j,\\ \rho_2 w_i=\sum_j a_{ij}z_j,\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,3).$$

那末这两点联线上的任一点 $x=y+\lambda z$ 转变为直线 u，使

$$\rho_3 u_i=\sum_j a_{ij}x_j=\sum_j a_{ij}(y_j+\lambda z_j)$$

$$=\sum_j a_{ij}y_j+\lambda\sum_j a_{ij}z_j.$$

即 $$\rho_3 u_i=\rho_1 v_i+\lambda\rho_2 w_i,$$

因此 $$\sigma u_i=v_i+\lambda' w_i,$$

其中

$$\sigma=\frac{\rho_3}{\rho_1},\quad \lambda'=\frac{\rho_2}{\rho_1}\lambda.$$

这说明了点列 $y+\lambda z$ 按配极对应转变为线束 $v+\lambda' w$，其中 λ 与 λ' 之间有一个射影对应的关系（从而点列中四点的交比，等于它们四条极线的交比）．证完．

因为射影性质是在射影对应下保持不变的性质，而配极对应又使得点列和线束成射影对应，所以通过配极对应，有关点列的性质便转变为有关线束的相应性质．

庞斯雷（Poncelet）首先由配极对应的上述性质说明射影几何里对偶原理的正确性.

现在来证明 6.2 节定理.

定理 2　常态二阶曲线的切线构成常态二级曲线.

证明　设二次曲线 Γ 的点方程(二阶曲线)为

$$\sum a_{ij}x_ix_j=0,\ (a_{ij}=a_{ji},\ |a_{ij}|\neq 0).$$

设一点 x 在 Γ 上，则点 x 的极线即 Γ 在这点的切线，从而切线的坐标由(1)式给出：

$$(1)\qquad \begin{cases}\rho u_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \rho u_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \rho u_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3.\end{cases}$$

6.4 节定理 5 证明了点 x 在 Γ 上的充要条件是：点 x 在该点的极线上，即

$$(3)\qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0.$$

把(1)和(3)看作四元 x_1, x_2, x_3, ρ 的齐次方程组，由于这四数不可能同时为零($\rho\neq 0$, $(x_1, x_2, x_3,)\neq(0, 0, 0)$)，消去 x_1, x_2, x_3, ρ 便得 Γ 的切线 u 所应满足的方程：

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3\\ u_1 & u_2 & u_3 & 0\end{vmatrix}=0.$$

展开即

$$(4')\qquad A_{11}u_1^2+A_{22}u_2^2+A_{33}u_3^2+2A_{12}u_1u_2+2A_{23}u_2u_3+2A_{13}u_1u_3=0.$$

此式也可将(2)代入(3)得到. 由于 $|a_{ij}|$ 是对称行列式，故 $A_{ij}=A_{ji}$，即(4′)的矩阵也是对称的. 并且 $|A_{ij}|=|a_{ij}|^2\neq 0$. 所以(4′)是一个常态二级曲线. 从这里我们得出一个方法，已知常态

二次曲线的点方程时，如何求其线方程.

仿此可证：已知一常态二次曲线的线方程为(4′)，则其点方程为

$$
(5) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.
$$

可以证明(我们满足于叙述结果，不作代数知识的补充了)，(5)式与最初出发的 $\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 等价.

6.6 二次曲线的射影分类

在这里，仅就以点坐标表达的二次曲线(二阶曲线)进行射影分类. 二级曲线的射影分类可以对偶地推广. 中心概念是二次型的秩和二次曲线的自极三角形(6.4 节).

定义 设二阶曲线的方程为

$$
\Gamma: \qquad \sum a_{ij}x_ix_j=0,\ a_{ij}=a_{ji},
$$

凡满足方程组

$$
(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}
$$

的点 x，称为 Γ 的奇异点. Γ 的奇异点若存在，必在 Γ 上.

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

称为 Γ 的判别式，行列式的秩称为 Γ 的秩.

下面分三种情况进行讨论.

I. 设 D 的秩为 3，这时 $D\neq 0$，方程组(1)没有非零解，即 Γ 没

有奇异点．平面上每一点 x 存在唯一的一条对应极线：

$$(2)\qquad \begin{cases}\rho u_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \rho u_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \rho u_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\end{cases}$$

这里$(u_1,u_2,u_3)\neq(0,0,0)$，否则(1)将有非零解，秩将小于 3 了．

在平面上任取一点 A_1(但不在 Γ 上)，以 a_1 表示 A_1 关于 Γ 的极线．在 a_1 上但不在 Γ 上任取一点 A_2，以 a_2 表示 A_2 关于 Γ 的极线，则 a_2 通过 A_1(6.4 节定理 3)．设 A_3 是 a_1,a_2 的交点．由于 A_3的一个共轭点是 A_1，一个共轭点是 A_2，所以 A_3 的极线是 $a_3=A_1A_2$．$\triangle A_1A_2A_3$ 是 Γ 的一个自极三角形(图 6.10)．这样的自极三角形有无数个．

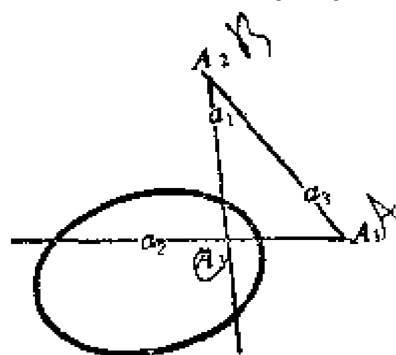


图 6.10

现在取自极三角形$\triangle A_1A_2A_3$ 为坐标三角形，我们来看 Γ 的方程如何简化．

我们知道(6.4 节定理 1)，两点 y 和 z 关于 Γ 成共轭的条件是

$$\sum a_{ij}y_iz_j=(a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3)z_1+(a_{12}y_1+a_{22}y_2+a_{32}y_3)z_2+(a_{13}y_1+a_{23}y_2+a_{33}y_3)z_3=0,$$

于是，由于 A_1 和 A_2 成共轭，$a_{12}=0$；A_1 和 A_3 成共轭，$a_{13}=0$；A_2 和 A_3 成共轭，$a_{23}=0$．所以 Γ 的方程变为

$$(3)\qquad a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0.$$

由于 $D=a_{11}a_{22}a_{33}\neq0$，所以 a_{11}，a_{22}，a_{33} 都不为零，可见取自极三角形作为坐标三角形，曲线方程的长方项便消去了．

因(3)式各项符号的异同，又可分成两种情况，如果以 x_i 代替 $\sqrt{|a_{ii}|}x_i$（这等于选取合宜的单位点）且适当地交换坐标三角形的顶点的话，那末我们有

(3_1) $$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0,$$

(3_2) $$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0.$$

因此下面的定理成立:

定理1 没有奇异点(秩为3)的二阶曲线分为两类:(*i*)虚二阶曲线,其方程可简化为(3_1)式;(*ii*)实二阶曲线,其方程可简化为(3_2)式.

II. 设D的秩为2,这时方程组(1)中有两个是线性独立的,因此二阶曲线有一个奇异点,以y表之.

首先,奇异点y的极线不存在,因将(2)式右端的x_i代以y_i时,由于假设了y是奇异点,便得$u_1=0, u_2=0, u_3=0$,而这不代表任何直线.

其次,除奇异点外任一点x的极线都通过奇异点y.这是因为

$$\begin{aligned}
&\rho(u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3)\\
&\quad=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)y_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)y_2\\
&\qquad+(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)y_3\\
&\quad=(a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3)x_1\\
&\qquad+(a_{12}y_1+a_{22}y_2+a_{32}y_3)x_2+(a_{13}y_1+a_{23}y_2+a_{33}y_3)x_3\\
&\quad=(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)x_1+(a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3)x_2\\
&\qquad+(a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3)x_3\\
&\quad=0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=0.
\end{aligned}$$

也就是说,奇异点和平面上每一点共轭.

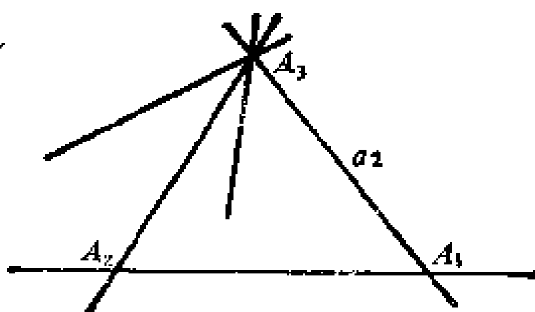


图 6.11

现在取这唯一奇异点当作坐标三角形的顶点$A_3(0,0,1)$,则由(1)式,得$a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $a_{33}=0$.取平面上任一点(但不在Γ上)

作为坐标三角形的顶点 $A_2(0,1,0)$，那末 A_2 的极线 a_2 由方才所说通过 A_3. 在 a_2 上任取一点作为顶点 $A_1(1,0,0)$ (图 6.11). 由于 A_1 和 A_2 关于 Γ 成共轭，和上面一样有 $a_{12}=0$. 在这样选取的坐标系下，Γ 的方程简化为

$$(4)\qquad a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2=0,$$

其中 a_{11} 和 a_{22} 都不为零(否则 Γ 的秩将小于 2 了)。

因(4)各项符号的异同，又可分成两种情况. 如果以 x_i 代替 $\sqrt{|a_{ii}|}\,x_i$ 的话，那末我们有

$$(4_1)\qquad x_1^2+x_2^2=0,$$

$$(4_2)\qquad x_1^2-x_2^2=0.$$

因此下面的定理成立:

定理 2　只有一个奇异点(秩为 2)的二阶曲线分为两类：(i) 方程(4_1)表示的两条虚直线；(ii)方程(4_2)表示的两条实直线. 无论虚实，这两直线不重合，而交点为奇异点.

III. 设 D 的秩为 1，这时方程组(1)只有一个是线性独立的，因此 Γ 有一条直线，其上每一点都是奇异点. 取这直线作为坐标三角形的一边 $x_1=0$，那末以 $A_2(0,1,0)$和 $A_3(0,0,1)$代入(1)得 $a_{12}=a_{22}=a_{13}=a_{23}=a_{33}=0$. 在这情况下 Γ 的方程化为

$$(5)\qquad x_1^2=0.$$

因此得到

定理 3　有一条直线上的点都是奇异点(秩为 1)的二阶曲线是两条重合直线.

总起来说并用对偶原理得出下面的射影分类表:

$$\text{二阶曲线}\begin{cases}\text{常态二阶曲线，秩}=3:\begin{cases}\text{实的}: x_1^2+x_2^2-x_3^2=0,\\ \text{虚的}: x_1^2+x_2^2+x_3^2=0.\end{cases}\\ \text{变态二阶曲线}\begin{cases}\text{秩}=2:\begin{cases}\text{两条实直线}: x_1^2-x_2^2=0,\\ \text{两条虚直线}: x_1^2+x_2^2=0.\end{cases}\\ \text{秩}=1: \text{两条重合直线}: x_1^2=0.\end{cases}\end{cases}$$

$$
\text{二级曲线}\begin{cases}\text{常态二级曲线,秩}=3:\begin{cases}\text{实的}: u_1^2+u_2^2-u_3^2=0,\\ \text{虚的}: u_1^2+u_2^2+u_3^2=0.\end{cases}\\ \text{变态二级曲线}\begin{cases}\text{秩}=2:\begin{cases}\text{两个实点}: u_1^2-u_2^2=0,\\ \text{两个虚点}: u_1^2+u_2^2=0.\end{cases}\\ \text{秩}=1: \text{两个重合点}: u_1^2=0.\end{cases}\end{cases}
$$

不要忘了，一条直线被看作一个点列，一个点被看作一个线束.

例题 证明切于坐标三角形的二次曲线，它的方程可写为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3=0.$$

证明：设二次曲线

$$
(6)\qquad a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0
$$

切于坐标三角形的三边. 因此直线 $x_1=0$ 和它相交于两个重合点，即是说方程

$$a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{23}x_2x_3=0$$

有等根，或 $a_{23}^2=a_{22}a_{33}$. 同理有 $a_{13}^2=a_{11}a_{33}$, $a_{12}^2=a_{11}a_{22}$. 从此推得 a_{11}, a_{22}, a_{33} 都不为零，且应同号，因此不失一般性可以假设它们都是正数. 令 $a_{11}=a^2$, $a_{22}=b^2$, $a_{33}=c^2$ 则(6)可写为

$$
(ax_1)^2+(bx_2)^2+(cx_3)^2\pm2(ax_1)(bx_2)\pm2(bx_2)(cx_3)\pm2(ax_1)(cx_3)=0.
$$

作射影坐标变换（选取适当的单位点）

$$\rho X_1=ax_1,\quad \rho X_2=bx_2,\quad \rho X_3=cx_3\quad (abc\neq0),$$

上式可简化为

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2\pm2X_1X_2\pm2X_2X_3\pm2X_1X_3=0.$$

式内后三项符号不可能全为正，也不可能二负一正，否则左端将变成完全平方，轨迹为两条重合直线，显然与问题的性质不符. 所以后三项只可能或者全是负的，即

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2-2X_1X_2-2X_2X_3-2X_1X_3=0,$$

或者二正一负，例如

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2-2X_1X_2+2X_2X_3+2X_1X_3=0.$$

在后一情况下，再作一次射影坐标变换（重新选取单位点）：

$$\sigma\xi_1=X_1,\quad \sigma\xi_2=X_2,\quad \sigma\xi_3=-X_3,$$

便变成所需的情况：

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-2\xi_1\xi_2-2\xi_2\xi_3-2\xi_1\xi_3=0.$$

*6.7　二次曲线束及其在解联立方程方面的应用

设有两条二次曲线，其方程为

$$f\equiv\sum a_{ij}x_ix_j=0,\qquad \varphi\equiv\sum b_{ij}x_ix_j=0.$$

解这两个联立方程的问题就是求这两条二次曲线交点的问题．把上两式按 x_3 的升幂排列即

$$A_2+A_1x_3+A_0x_3^2=0,\quad B_2+B_1x_3+B_0x_3^2=0,$$

其中 A_2 和 B_2 是 x_1 和 x_2 的二次齐次式，A_1 和 B_1 是 x_1 和 x_2 的一次齐次式，A_0 和 B_0 是常数．

从这两式可算出 $1:x_3:x_3^2$，得

$$\frac{1}{A_1B_0-A_0B_1}=\frac{x_3}{A_0B_2-A_2B_0}=\frac{x_3^2}{A_2B_1-A_1B_2}.$$

将公比记为 $\frac{1}{\rho}$，便有

$$\rho=A_1B_0-A_0B_1,$$
$$\rho x_3=A_0B_2-A_2B_0,$$
$$\rho x_3^2=A_2B_1-A_1B_2.$$

消去 ρ 和 x_3 得

$$(A_0B_2-A_2B_0)^2=(A_1B_0-A_0B_1)(A_2B_1-A_1B_2).$$

这是 x_1 和 x_2 的四次齐次式，一般给出 x_1 与 x_2 的四个比值．再将每一组解代入

$$\frac{1}{A_1B_0-A_0B_1}=\frac{x_3}{A_0B_2-A_2B_0}$$

便得出四组解 $x_1:x_2:x_3$，于是得

定理1 两条二次曲线一般有四个交点。

要注意的是，这四个交点不一定全是实的，也不一定全是互异的。例如两个圆最多相交于两个实点，另外两个公共点在无穷远线上而且是一对共轭虚点(习题 2.17)。

定义 方程 $f+\lambda\varphi=\Sigma a_{ij}x_ix_j+\lambda\Sigma b_{ij}x_ix_j=0$($\lambda$ 为参变数)所表达的一切二次曲线，称为构成一个二次曲线束。二次曲线 C_1: $f=0$ 和 C_2: $\varphi=0$ 称为这个二次曲线束的基底。

应该指出，对于任意指定的数 λ，曲线 $f+\lambda\varphi=0$ 通过 C_1 和C_2 的各个公共点。因若设 P_0 为一公共点，则由于 $f(P_0)=0$ 和 $\varphi(P_0)=0$，便也有 $f(P_0)+\lambda\varphi(P_0)=0$。并且，凡通过$C_1$和$C_2$公共点的一条二次曲线都可以表达为 $f+\lambda\varphi=0$，其中 λ 为某一合宜选择的数值。这是因为二次曲线由五点决定，对于任意的 λ，二次曲线 $f+\lambda\varphi=0$ 已经通过了 C_1 和 C_2 的四个公共点 A,B,C,D。要确定所需的二次曲线，还得再给一点。选择 $\lambda=-\dfrac{f(P)}{\varphi(P)}$，那末相应的二次曲线便通过 P点了。

定理2 二次曲线束内有三条变态的二次曲线，那也就是三对直线。

证明 由几何方面言，设 C_1 与 C_2 的交点为 A，B，C，D(图 6.12)，则完全四点形的三双对边 (AB,CD)，(AC,BD)，(AD,BC) 便是束中的三条变态二次曲线。

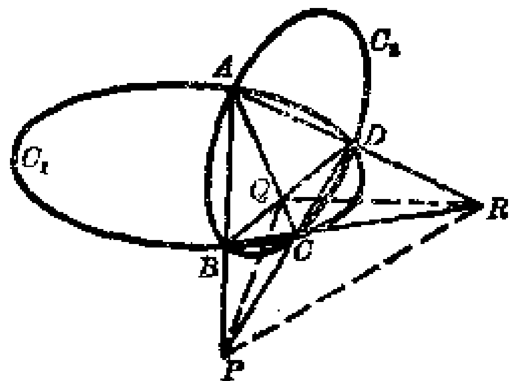


图 6.12

我们所需要的，还是问题的代数侧面。要束中一条二次曲线

$f+\lambda\varphi=\sum(a_{ij}+\lambda b_{ij})x_ix_j=0$ 成为变态的充要条件是它的行列式为零:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} \end{vmatrix}=0.$$

这是 λ 的三次方程,设其三根为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,则束中有三条变态二次曲线

$$f+\lambda_1\varphi=0,\quad f+\lambda_2\varphi=0,\quad f+\lambda_3\varphi=0.$$

证完.

例题 给了无三点共线的五点 a, b, c, d, e,求它们所决定的二次曲线 Γ 的方程.

解 a, b 的联线和 c, d 的联线决定一变态二次曲线

$$C_1:\qquad |xab|\cdot|xcd|=0;$$

同理,a, d 的联线和 b, c 的联线决定一变态二次曲线

$$C_2:\qquad |xad|\cdot|xbc|=0.$$

通过四点 a, b, c, d 的二次曲线可写作 C_1, C_2 的线性组合:

$$|xab|\cdot|xcd|+\lambda|xad|\cdot|xbc|=0.$$

选择 λ 使它又通过点 e,则必

$$|eab|\cdot|ecd|+\lambda|ead|\cdot|ebc|=0.$$

从此二式消去 λ 得所求二次曲线

$$\Gamma:\qquad |ead|\cdot|ebc|\cdot|xab|\cdot|xcd| - |eab|\cdot|ecd|\cdot|xad|\cdot|xbc|=0.$$

如果 C_1 和 C_2 的交点 A, B, C, D 是互异的,那末束中有三条互异的变态二次曲线 $(AB, CD), (AC, BD), (AD, BC)$.

完全四点形 $ABCD$ 有一个对角三角形 PQR (图 6.12),这三角形不论对于 C_1 或是 C_2 都是自极三角形,因此是 C_1 和 C_2 的公共自极三角形. 由 6.6 节,如果取这公共自极三角形作为坐标三

角形，那末 C_1 和 C_2 的方程同时化成平方和，即这时 C_1 和 C_2 的方程为

$$C_1:\ f\equiv a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0,$$

$$C_2:\ \varphi\equiv b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2=0.$$

于是束中每一二次曲线 $f+\lambda\varphi=0$ 都没有长方项，也就是说，$\triangle PQR$ 是束中所有二次曲线的公共自极三角形.

如果 A,B,C,D 中有两点相重，例如设 $A\equiv B$，那末 C_1 和 C_2 相切于 A，相交于 C 和 D. 这时变态二次曲线的一条由 A 点的公切线和公弦 CD 构成，另外两条变态曲线由 AC 和 AD 形成，算作两次(图 6.13).

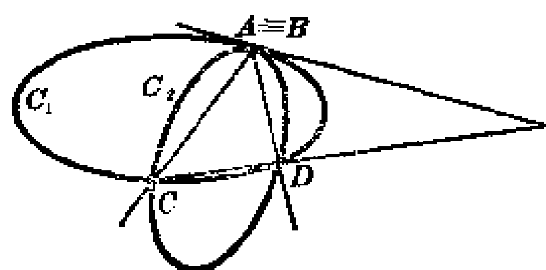


图 6.13

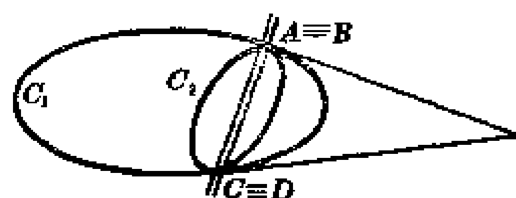


图 6.14

如果 $A\equiv B, C\equiv D$，C_1 和 C_2 称为在 A 和 C 成双切. 变态二次曲线中一条由 A，C 两点的公切线构成，另外两条重合（算作两次），由重合直线 AC 构成(图 6.14).

如果 $A\equiv B\equiv C, C_1$ 和 C_2 称为在 A 有二阶切触，变态二次曲线都相重(算作三次)，由 A 点的公切线和公弦 AD 构成(图 6.15).

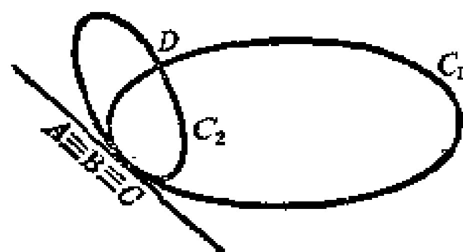


图 6.15

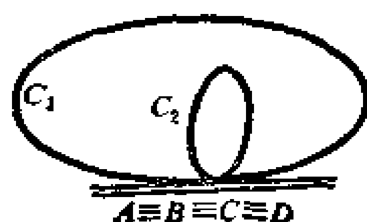


图 6.16

如果 A, B, C, D 四点都相重合(图 6.16), 则称 C_1 和 C_2 在 A 有三阶切触, 这时变态二次曲线都相重(算作三次), 由重合公切线构成.

最后我们谈一谈二次曲线束在解二元二次联立方程方面的应用.

我们知道, 要求两圆

$$C_1:\ x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0,$$

$$C_2:\ x^2+y^2+2D_2x+2E_2y+F_2=0$$

(x, y 代表正交笛卡尔坐标)的交点, 可以将两式相减, 得出两圆根轴的方程.

$$l:\ 2(D_1-D_2)x+2(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0,$$

然后求 C_1 与 l 的交点即得. 这样解法实际上是二次曲线束理论的一个简单应用.

以 C_1 和 C_2 为基底形成的一个二次曲线束(圆束)是

$$(1+\lambda)(x^2+y^2)+2(D_1+\lambda D_2)x+2(E_1+\lambda E_2)y$$
$$+F_1+\lambda F_2=0,$$

令这二次式的行列式等于零, 得

$$(1+\lambda)[(1+\lambda)(F_1+\lambda F_2)-(D_1+\lambda D_2)^2$$
$$-(E_1+\lambda E_2)^2]=0.$$

所以 $\lambda=-1$ 对应于圆束中的一条变态二次曲线, 它通过 C_1 和 C_2 的公共点. 所以将这变态曲线代替 C_2 或 C_1 联立求解, 便解决了问题.

这里自然要声明一点: 变态二次曲线应该是二次式, 为什么 $\lambda=-1$ 对应于一条直线 l 呢? 这是因为我们此地所求的是两圆的有限交点, 如果要求全拓广面上的交点, 应该首先将 C_1 和 C_2 的方程齐次化, 那时二次曲线束的方程就变为

$$(1+\lambda)(x^2+y^2)+2(D_1+\lambda D_2)xt+2(E_1+\lambda E_2)yt$$

$$+(F_1+\lambda F_2)t^2=0.$$

于是看出 $\lambda=-1$ 所对应的变态曲线由 l 与无穷远线 $t=0$ 构成。若将无穷远线与 C_1 联立求解，得出的自然就是一切圆所通过的虚圆点(习题 2.17)。

我们再举一个例：解联立方程组

$$\begin{cases}2x^2+4xy-2x-y+2=0,\\3x^2+6xy-x+3y=0.\end{cases}$$

代数书上说，以 3 乘第一式，以 2 乘第二式，相减便得

$$4x+9y-6=0.$$

联立解此式与第二式便得所求的有限解为

$$\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases};\quad\begin{cases}x=-2\\y=\dfrac{14}{9}.\end{cases}$$

问题在于这是怎样看出来的呢？是凑出来的吗？要知道，问题的根源还在二次曲线束的理论.

形成二次曲线束

$$(2+3\lambda)x^2+(4+6\lambda)xy-(2+\lambda)x-(1-3\lambda)y+2=0.$$

令这式的行列式等于零，立刻发现 $\lambda=-\dfrac{2}{3}$ 是一个根. 这根 $\lambda=-\dfrac{2}{3}$ 对应于二次曲线束中的变态二次曲线.

$$(4x+9y-6t)t=0.$$

求有限解时便抛弃了 $t=0$(无穷远线)这个因子.

习　题

6.1　试求二阶曲线的方程，它是由两个射影线束

$$x_1-\lambda x_2=0 \text{ 与 } x_2-\lambda' x_3=0\quad\left(\lambda'=\frac{\lambda-1}{\lambda+2}\right)$$

所决定的.

6.2　设有一变动的三角形，三边各通过一定点，两个顶点分别在一定直线上移动，证明第三顶点产生一条通过三定点中的两个定点的二阶曲线.

6.3　在平面上给定四点 A, B, C, D, 其中无三点共线，求满足条件 $P(AB,CD)=$定值 k 的 P 点的轨迹.

6.4　建立一个透视对应使以 $A_1(1,0,0)$ 为中心的线束对应于以 $A_2(0,1,0)$ 为心的线束；并求这两透视线束所产生的变态二阶曲线的方程.

6.5　$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 同时外切于一二次曲线，证明它们的六个顶点在另一二次曲线上. 逆定理也成立.

6.6　给定二次曲线上五点，求作曲线上另外一些点.

6.7　给定二次曲线五条切线，求作曲线另外一些切线.

6.8　给定一二次曲线上五点，利用巴斯卡定理作曲线在这五点之一的切线.

6.9　设六角形的对边互相平行，求证这六角形内接于一二次曲线.

6.10　内接于圆的两个三角形 ABC 与 $A'B'C'$ 中，设交点 $P=AB\times A'B'$, $Q=BC\times B'C'$, $X=CA'\times C'A$. 证明这三点共线.

6.11　四边形 $ABCD$ 的四边 AB, BC, CD, DA 分别与一圆切于 E, F, G, H. 求证：(i) AC, BH, DE 共点；(ii) BG, DF, AC 共点；(iii) AC, BD, HF, GE 共点.

6.12　从一点 y 向二次曲线 $\Sigma a_{ij}x_ix_j=0$ 引两条切线，证明这两条切线的方程可写作 $(\Sigma a_{ij}y_iy_j)(\Sigma a_{ij}x_ix_j)-(\Sigma a_{ij}y_ix_j)^2=0$.

6.13　给定一二次曲线，证明在不是切线的每一直线上有无穷多的共轭点偶，它们组成一个对合对应.

6.14　在二次曲线上取两点 A_1, A_3 作为坐标三角形两个顶点，取曲线在这两点的切线的交点 A_2 作为第三个顶点. 证明合宜选择单位点时，可将曲线方程写为 $x_1x_3-x_2^2=0$.

6.15　证明以 $x_1x_3-x_2^2=0$ 为点坐标方程的二次曲线，它的线坐标方程为 $4u_1u_3-u_2^2=0$.

6.16　证明以 $u_1u_3-u_2^2=0$ 为线坐标方程的二次曲线，它的点坐标方程为 $4x_1x_3-x_2^2=0$.

6.17　证明以 $4u_1u_3-u_2^2=0$ 为线坐标方程的二次曲线，它的点坐标方程为 $x_1x_3-x_2^2=0$.

6.18　求下列二次曲线的秩，如果是变态的，试求其奇异点及其组成直

线:

(a) $2x_1^2-x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3+7x_3x_1-x_1x_2=0$,

(b) $2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+2x_2x_3-x_3x_1+x_1x_2=0$,

(c) $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-8x_2x_3+4x_3x_1-4x_1x_2=0$.

6.19 求二次曲线 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-x_1x_3=0$ 的线坐标方程, 并从所得结果, 重新求点坐标方程, 以与原方程比较.

6.20 设(x_1, y_1)为一已知点, 证明它对下列二次曲线的极线(当此点在二次曲线上时, 即为切线)的方程为:

(a) $x^2+y^2=r^2$; $x_1x+y_1y=r^2$;

(b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$; $\dfrac{x_1x}{a_2}+\dfrac{y_1y}{b_2}=1$;

(c) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$;

(d) $y^2=2px$; $y_1y=p(x+x_1)$;

(e) $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$;

$ax_1x+b(y_1x+x_1y)+cy_1y+d(x+x_1)+e(y+y_1)+f=0$.

总结规律如下: 要由一条二次曲线(高次曲线不适用)得出一已知点 (x_1, y_1) 对于它的极线(特殊情况下, 切线)的方程, 只要在曲线的方程中作如下代换:

$x^2\to x_1x$, $xy\to\dfrac{1}{2}(y_1x+x_1y)$, $y^2\to y_1y$,

$x\to\dfrac{1}{2}(x+x_1)$, $y\to\dfrac{1}{2}(y+y_1)$, 常数不动.

6.21 证明外接于坐标三角形的二次曲线, 其方程可写作

$$ax_2x_3+bx_3x_1+cx_1x_2=0.$$

由此推证: 设坐标三角形三边的方程为$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$, $b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$, $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$. 则外接于这坐标三角形的二次曲线可表为

$$a(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)$$
$$+b(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)$$
$$+c(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)=0.$$

6.22 应用上题方法解中学解析几何题, 求三角形外接圆的方程. 已知三角形的三边为

$$x-y=0, x-3y-2=0, x+y-2=0.$$

6.23 解中学解析几何题: 求经过圆 $x^2+y^2-2x=0$ 和直线 $x+2y-3$

$=0$ 的交点，并且圆心在 y 轴的圆的方程．

*6.24　解联立方程：$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+4x+3y-1=0, \\ 2x^2-5xy+y^2+8x+2y-3=0. \end{cases}$

*6.25　解联立方程：$\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0, \\ xy+y^2+3y+1=0. \end{cases}$

第七章　二次曲线的仿射性质

用射影几何观点来研究它的子几何(仿射几何)上的常态二次曲线，那末二次曲线分为三种类型. 这里主要介绍二次曲线的中心、直径、渐近线以及二次曲线的仿射分类.

7.1　二次曲线的中心和直径

我们只就常态二次曲线进行讨论，即假设在二次曲线方程 $\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 里，$|a_{ij}|\neq 0$，对于常态二次曲线，极点与极线是一一对应的，那末仿射平面上唯一的特殊直线无穷远直线也应有唯一的极点. 因此有

定义　关于一条二次曲线 Γ，若无穷远直线的极点为有限点，则称此点为 Γ 的中心，曲线 Γ 这时称为有心二次曲线. 若极点为无穷远点，则 Γ 在此处与无穷远直线相切，称 Γ 为无心二次曲线。

事实上，设无穷远直线 l_∞ 关于 Γ 的极为 C，过 C 作任一直线与二次曲线交于两点 P_1, P_2，与无穷远直线 l_∞ 交于 P，由极点与极线的定义

$$(CP, P_1P_2)=-1.$$

但是 P 是无穷远点，所以 C 是 P_1P_2 的中点. 换言之，通过 C 点的任一弦都以 C 为中点. 这与欧氏几何里关于中心的定义一致.

二次曲线以齐次仿射坐标表示为

$$(1)\qquad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0.$$

由于无穷远直线 $t=0$ 的坐标为(0, 0, 1)，代入 6.5 节(2) 极与极线的关系式，得中心坐标是

$$\sigma x=A_{31},\quad \sigma y=A_{32},\quad \sigma t=A_{33}.$$

若 $A_{33}\neq 0$, 用非齐次坐标 $\xi=\frac{x}{t}$, $\eta=\frac{y}{t}$ 表示, 则中心为

$$(2)\qquad \xi=\frac{A_{31}}{A_{33}},\quad \eta=\frac{A_{32}}{A_{33}}.$$

注意: 解析几何里, 求二次曲线的中心的方程为

$$\begin{cases}(\alpha)\ a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}=0,\\(\beta)\ a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}=0.\end{cases}$$

解之得中心的坐标 $\xi=\frac{A_{31}}{A_{33}}$, $\eta=\frac{A_{32}}{A_{33}}$, 与上面的一致. 上两式 (α), (β) 恰好是 x 轴上无穷远点 $(1,0,0)$ 与 y 轴上无穷远点 $(0,1,0)$ 关于二次曲线 Γ 的极线. 因 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 在 l_∞ 上, 所以它们关于 Γ 的极线应该通过 l_∞ 关于 Γ 的极, 即 Γ 的中心.

$A_{33}\neq 0$, 时, 二次曲线有中心, 此时二次曲线为**有心二次曲线**, 如果 $A_{33}=0$, 二次曲线为**无心二次曲线**. 有心二次曲线又可分为两种, 即 $A_{33}>0$ 与 $A_{33}<0$ 两种情况:

$A_{33}>0$ 时, 二次曲线和无穷远直线 $t=0$ 的两个交点满足方程

$$(3)\qquad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0,\ t=0.$$

第一式(看作 $k=\frac{y}{x}$ 的方程)有两个共轭复根, 即二次曲线与无穷远线 $t=0$ 交于两个共轭虚点, 这种二次曲线称为**椭圆**.

$A_{33}<0$ 时, 二次曲线和无穷远直线 $t=0$ 的两个交点所满足的方程(3)有两个互异的实根, 所以两个交点是实点, 这种二次曲线称为**双曲线**.

此外, 若 $A_{33}=0$, (3)有两相等实根, 所以二次曲线与无穷远直线 $t=0$ 交于两个重合的实点, 即二次曲线与无穷远直线相切, 这种二次曲线称为**抛物线**.

定义 无穷远点关于二次曲线 Γ 的极线 (极线为无穷远直线除外), 称为 Γ 的**直径**.

根据配极对应的性质可见有心二次曲线的直径通过中心，无心二次曲线的直径互相平行。

定义 如果两条直径之一的极点在另一直径上，则这两条直径称为共轭直径。

这定义与欧氏几何学里的定义"直径 a 与 a' 称为共轭直径，如果平行于 a 的各弦中点在 a' 上"，是一致的。

事实上，设直径 a 上的无穷远点为 P_∞，那末 P_∞ 的极线应是一条直径 a'。a 既然通过 P_∞，由上述定义，它们是共轭直径。可是通过 P_∞ 的直线是平行于 a 的，这些直线与二次曲线的交点组成平行于 a 的弦，这些平行弦的中点所成的轨迹应是 P_∞ 的极线，也就是 a'（图 7.1）。

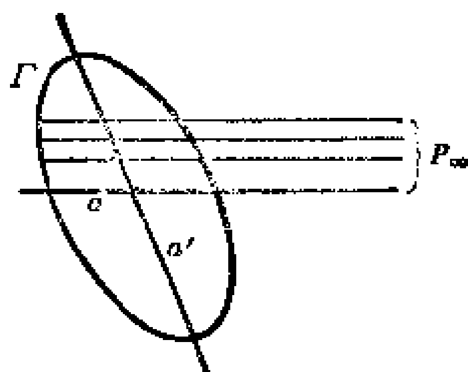


图 7.1

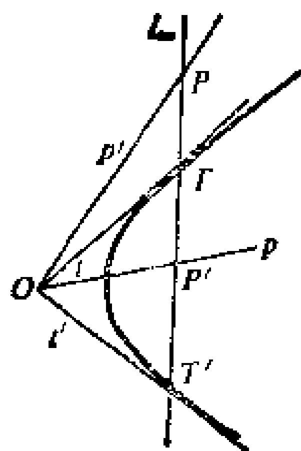


图 7.2

7.2 二次曲线的渐近线

定义 设二次曲线与无穷远直线 l_∞ 相交于两点 T, T'，那末以 T, T' 两点为切点的切线就称为二次曲线的渐近线。

由此定义，有下面的定理：

定理 1 二次曲线的两条渐近线交于中心，而且调和分割任意一对共轭直径。换言之，二次曲线的所有共轭直径对，是一个对合中的对应直径，这对合的二重线就是两条渐近线。

证明 设一对共轭直径 p, p' 分别交 l_∞ 于 P', P。因为渐近

线 t, t' 是切线，所以切点就是它的极点，可是切点在 l_∞ 上，所以渐近线 t, t' 必然通过 l_∞ 的极点，即渐近线通过中心 O.

又因为 p 通过 p' 的极点 P'，p' 通过 p 的极点 P(图 7.2)，所以

$$(TT', PP') = -1,$$

因此
$$O(TT', PP') = -1.$$

也就是说：**渐近线调和分割任意一对共轭直径.**

定理 2　*双曲线有两条实的渐近线，椭圆有两条虚的渐近线，抛物线以无穷远直线为渐近线.*

事实上，二次曲线与 l_∞ 的交点和中心所连的直线就是渐近线. 如果交点是两个实点，那末它们和中心的连线是两条实线，这就是双曲线的情况. 如果交点是两个虚点，那末它们和中心的连线是两条共轭虚线，这就是椭圆的情况. 如果交点是一个实点(二重点)，这时中心也就是这一点，它们的连线就是 l_∞ 本身，这就是抛物线的情况. 证完.

在仿射坐标下，二次曲线之方程为：

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0.$$

它和无穷远直线 $t=0$ 的交点满足

$$(4)\qquad a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0,$$

这方程又可表为 $(\alpha x+\beta y)(\gamma x+\delta y)=0$，即(4)式表示过原点的两条直线，这两条直线分别和二次曲线的渐近线平行(图 7.3). 通过中心 $C(\xi, \eta)$，作这两线的平行线，即以

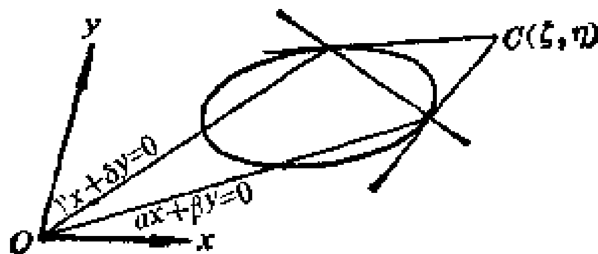


图 7.3

$$(5)\qquad \begin{cases} X = x-\xi \text{ 代替 } x \\ Y = y-\eta \text{ 代替 } y, \end{cases}$$

则由(4)推出

$$a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2=0,$$

这正是渐近线的方程.

例题: 求曲线

$$x^2-2xy-3y^2+2x-4y=0$$

的渐近线的方程.

解 系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix},$$

所以 $A_{31}=1$, $A_{32}=3$, $A_{33}=-4$, 因此中心坐标为

$$\xi=\frac{A_{31}}{A_{33}}=-\frac{1}{4},\quad \eta=\frac{A_{32}}{A_{33}}=-\frac{3}{4}.$$

由 $X^2+2XY-3Y^2=0$, 分解为 $(X-Y)(X+3Y)=0$, 则 $X-Y=0$, $X+3Y=0$, 将 $X=x+\frac{1}{4}$, $Y=y+\frac{3}{4}$ 代入得

$$x=y+\frac{1}{2},\quad x=-3y-\frac{5}{2}.$$

这就是两条渐近线的方程.

7.3 二次曲线的仿射分类

在齐次仿射坐标 (x, y, t) 之下, 常态二次曲线的方程是

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0,$$

它的系数行列式是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (a_{ik}=a_{ki}).$$

下面分二种情况讨论:

(I)　$A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. 这时二次曲线是有心的，以中心作为坐标三角形的一个顶点 A_3，以过中心的两条共轭直径作为坐标三角形的边，以中心的极线(也就是 l_∞)作为坐标三角形的第三边(图 7.4)，这种三角形一定是自极三角形. 同 6.6 节的讨论一样,二次曲线的方程可简化为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}t^2=0.$$

如果以 x, y, t 分别代替 $\sqrt{|a_{11}|}\,x$, $\sqrt{|a_{22}|}\,y$, $\sqrt{|a_{33}|}\,t$ 并且在必要时交换 x 和 y 的身份，那末上式因各项符号的异同又可分成如下三种情况:

(*i*)　$x^2+y^2+t^2=0$ 或用非齐次坐标 $x^2+y^2+1=0$
　　(虚椭圆).

(*ii*)　$x^2+y^2-t^2=0$ 或用非齐次坐标 $x^2+y^2-1=0$
　　(实椭圆).

(*iii*)　$x^2-y^2-t^2=0$ 或用非齐次坐标 $x^2-y^2-1=0$
　　(双曲线).

注意: 以上的分类既然根据 6.6 节, 为什么这时有(*i*)至(*iii*)三种情况而在 6.6 节里只有类似(*i*), (*ii*)的两种情况呢?因为那时的x_1, x_2, x_3 三个坐标有同等的身份，所以 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ 和 $x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$(即$-x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$)看作同一情况. 可是现在 x, y, t

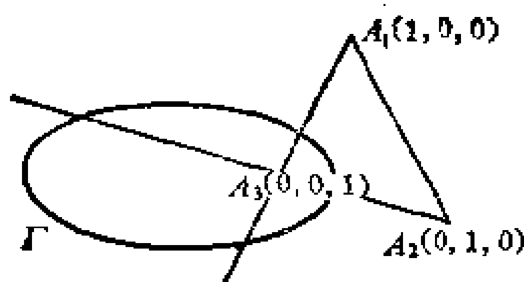


图　7.4

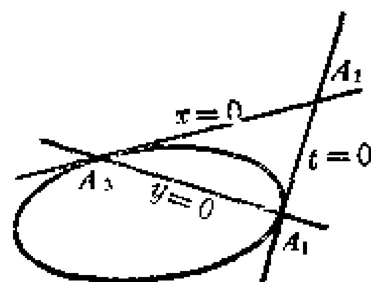


图　7.5

就不同了，这时 $t=0$ 固定地表示无穷远直线 l_∞，所以它们的身份不是同等的．因此 $x^2+y^2-t^2=0$ 和 $x^2-y^2-t^2=0$（即 $-x^2+y^2+t^2=0$）不能看作同一情况，因为 x（或 y）不能与 t 互换．

（II）$A_{33}=0$，这时二次曲线是无心的（心在 l_∞ 上）．以 l_∞ 跟一直径及此直径与二次曲线的有限交点处的切线作为坐标三角形的三边（图 7.5）．它的顶点是 $A_1(1,0,0)$，$A_2(0,1,0)$，$A_3(0,0,1)$．因为 A_1 和 A_2 共轭，A_2 和 A_3 共轭（切线上的点与切点共轭），由 6.4 节定理 1 得

$$a_{12}=0,\ a_{23}=0.$$

又因为 A_1，A_3 在二次曲线上，所以 $a_{11}=a_{33}=0$．因此在上述的坐标三角形之下，二次曲线的方程可简化为

$$a_{22}y^2+2a_{13}xt=0 \text{ 或 } y^2-2pxt=0,\quad \left(p=\frac{-a_{13}}{a_{22}}\right).$$

如用非齐次坐标表示，即写成

$$y^2-2px=0.$$

它所表示的图形是抛物线．经过仿射坐标变换 $y=Y$，$x=\dfrac{1}{p}X$，这式还可简化为 $y^2-2x=0$．

- 常态二次曲线
  - 有心二次曲线（$A_{33}\neq 0$）
    - 椭圆（$A_{33}>0$）
      - 虚椭圆：$x^2+y^2+1=0$，
      - 实椭圆：$x^2+y^2-1=0$，
    - 双曲线（$A_{33}<0$）：$x^2-y^2-1=0$，
  - 无心二次曲线（$A_{33}=0$）—— 抛物线：$y^2-2x=0$．

7.4 例　　题

1．如果一个完全四角形（四点形）内接于一二次曲线，那末它的对角三角形是自极三角形．

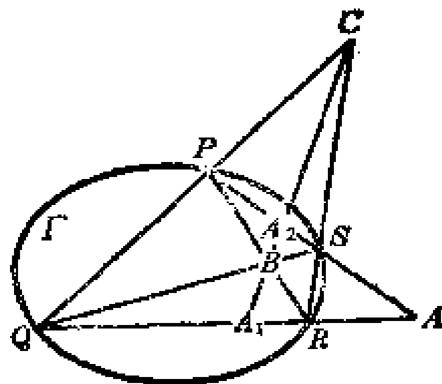


图 7.6

证明　设内接完全四角形 $PQRS$（图 7.6）的对角点是

$$A = PS \times QR,$$

$$B = QS \times RP,$$

$$C = RS \times PQ.$$

直线 BC 交一双对边 QR 与 PS 于 A_1, A_2. 那末 $(QR, AA_1) = -1$, $(PS, AA_2) = -1$. 因此 A 点的极线是 A_1A_2 或 BC, 同样 B 点的极线是 CA, C 点的极线是 AB.

2. 如果一个平行四边形内接于一二次曲线，那末它的两条对角线是二次曲线的直径，而且它的两边分别平行于一对共轭直径.

设 $PQRS$ 是内接于二次曲线 Γ 的平行四边形(图 7.7).

由于 $\triangle A_\infty BC_\infty$ 是四角形 $PQRS$ 的对角三角形，因而是自极三角形. B 是 $A_\infty C_\infty$ 关于 Γ 的极点，所以 B 是 Γ 的中心. 而 PR, QS 都通过 B, 所以 PR, QS 是 Γ 的直径.

又因 $PQ \parallel BC_\infty$, $QR \parallel BA_\infty$, 而 BC_∞, BA_∞ 是一对共轭直径（上题），所以平行四边形 $PQRS$ 的两边平行于一对共轭直径.

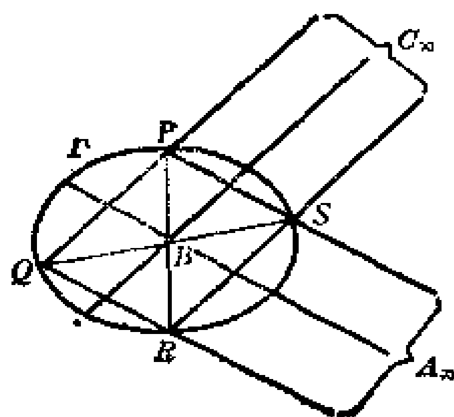


图 7.7

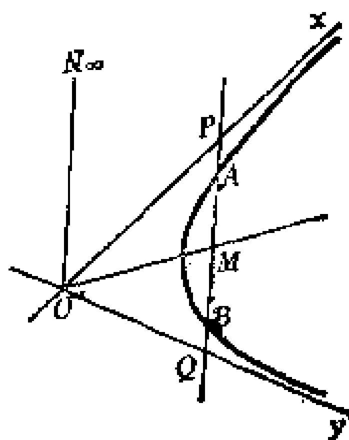


图 7.8

3. 如果双曲线的一条弦 AB 交两条渐近线于 P, Q 二点，那末 $PA = BQ$.

设弦 AB 被一条相应的共轭直径 OM 平分(图 7.8), M 为弦 AB 的中点. 作直径 ON_∞ 平行于 AB, 则 OM, ON_∞ 是一对共轭直

径. 于是按 7.2 节定理 1

$$O(PQ, MN_\infty)=-1,$$

所以

$$(PQ, MN_\infty)=-1,$$

即 $(PQM)=-1$, 或 M 为 PQ 的中点. 又因 M 为 AB 之中点, 所以 $PA=BQ$.

当弦 AB 为切线时, M 为切点, 得

定理 双曲线的任意一根切线介于两渐近线间的部分, 被切点平分。

习　题

7.1 试求二次曲线 $x^2+3xy-4y^2-2x-10y=0$ 的中心与渐近线.

7.2 试证有心二次曲线 $\sum a_{ij}x_ix_j=0$ 的渐近线和方程 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ 所表示的两条直线平行.

7.3 利用定理 7.1 证明双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两条以 λ, λ' 为斜率的直径成为共轭的条件是 $\lambda\lambda'=\frac{b^2}{a^2}$.

7.4 证明: 抛物线的固定方向的平行弦的中点在一直线上; 由此更证明当平行弦的方向改变时, 这些直线互相平行.

7.5 设有一平行四边形内接于一椭圆, 而且两边各平行于一对共轭直径, 试证这种平行四边形的面积一定.

7.6 共轭直径与椭圆的交点至中心的距离称为共轭半径. 试证任何二共轭半径之平方和等于定值.

7.7 从双曲线上任何一点引两直线各平行于渐近线. 证明这二线和渐近线构成的平行四边形之面积一定.

7.8 已知双曲线的一支及两条渐近线, 如何作另一支曲线?

7.9 过一条渐近线上的定点, 引直线截双曲线成为弦, 证这些弦的中点在平行于另一渐近线的一条直线上.

7.10 若有心二次曲线的一条直径通过一个定点 A, 则其共轭直径平行于 A 的极线.

7.11 证明: 有心二次曲线任一弦的两端点的切线相交于平分此弦的直径上. 这命题对于抛物线是否成立?



第八章　二次曲线的度量性质

上一章把拓广平面上一条直线 l_∞ 视为不变直线，讲了二次曲线的仿射性质. 本章进一步把 l_∞ 上两个共轭虚点（圆点）作为不变点，就进入仿射几何的子几何(欧氏几何)的观点了. 这里介绍迷向直线、拉格儿公式、二次曲线的主轴和焦点，它们直接或间接与欧氏变换的两个二重点(圆点)相关联.

8.1　圆　　点

以 ξ,η 表示笛氏直角坐标，那末圆的方程可表为

$$a_{11}(\xi^2+\eta^2)+2a_{13}\xi+2a_{23}\eta+a_{33}=0.$$

如果用齐次坐标，以 $\xi=\dfrac{x}{t}, \eta=\dfrac{y}{t}$ 代入上式，就得到

$$a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2=0. \tag{1}$$

这是在齐次坐标下圆的方程. 当 $a_{11}=0$ 时，(1) 式变为

$$t(2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}t)=0,$$

这表示两条直线 $2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}t=0$ 和无穷远直线 $t=0$. 所以当 $a_{11}=0$ 时，圆分解为二条直线，其中一条是无穷远直线，这种圆称为变态圆.

定理 1　平面内任何一圆通过无穷远直线上两个固定的共轭虚点.

证明　圆的方程 (1) 式和无穷远线 $t=0$ 的交点满足

$$\begin{cases}a_{11}(x^2+y^2)=0,\\ t=0.\end{cases}$$

设 $a_{11}\neq 0$，即讨论的圆是常态圆，那末交点满足 $x^2+y^2=0,\ t=0$；因此交点坐标是

$$x:y:t=1:\pm i:0 \quad (i=\sqrt{-1}).$$

从这里看出交点的坐标和a_{11}, a_{13}, a_{23}, a_{33}完全无关. 所以任何常态圆通过$I(1, i, 0)$, $J(1, -i, 0)$两点. 如果圆是变态圆, 它有一部分是l_∞, 当然通过上述二点了. 所以无论是常态圆或变态圆, 总是通过$(1, \pm i, 0)$二定点.

定理 2 通过两点$(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$的二次曲线一定是圆. 这两个定理见习题 2.17.

定义 两点$I(1, i, 0)$, $J(1, -i, 0)$称为平面内的圆点.

既知I, J坐标是$(1, \pm i, 0)$, 所以它们的方程是$u\pm iv=0$或$u^2+v^2=0$.

定义 过平面内任何一点至I, J两点的两条直线, 称为该点的迷向直线. 沿迷向直线的方向称为迷向方向.

由这个定义可知平面内通过每一点(圆点除外)都有两条迷向直线, 那末, 过每一点应该有两个迷向方向了; 可是这些迷向方向是分别彼此平行的, 因此我们说平面内只有两个迷向方向, 即是从任意一点引至I, J二点的方向.

由渐近线的定义, 过圆心引至I, J二点的迷向直线是圆的渐近线. 平面内所有的圆, 它们的渐近线是互相平行的.

注意: 迷向直线、圆的渐近线都是虚直线, 画不出来, 它们的方向是迷向方向. 但是可以求出其方向, 我们知道以k为斜率的直线上的无限远点坐标为$(1, k, 0)$. 并且, $\mathrm{tg}\alpha=k$, α为直线与x轴的夹角. 设O为笛氏坐标原点, OI, OJ与x轴的夹角分别为α_1, α_2, 则

$$\mathrm{tg}\alpha_1=i,\ \mathrm{tg}\alpha_2=-i.$$

换言之, α_1与α_2满足$\mathrm{tg}^2\alpha+1=0$.

迷向方向分为两类, 斜率$\lambda=i$的算一类, $\lambda=-i$的算一类, 两类迷向线的斜率λ有定义, 两斜角α则无定义, 这是因为, (例如

说)设 $\operatorname{tg}\alpha=i$，则

$$\sin\alpha=i\cos\alpha,$$

即

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=0,$$

不论 α 为实数或复数，应用欧拉公式，于是应有 $e^{i\alpha}=0$. 但若令 $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$($\alpha_1,\alpha_2$ 为实数)，即有

$$e^{i\alpha}=e^{-\alpha_2}e^{i\alpha_1}=e^{-\alpha_2}(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)$$

对于一切 α_1,α_2，右端不可能为零，所以关于迷向线只用斜率，不用斜角.

关于迷向直线与圆点，有以下几个重要的定理.

定理 3　每一个迷向方向和任意一个其它方向所成的夹角是无定义的.

首先同类两迷向线的夹角无定义，因为在惯常求交角的公式

(2)　$\operatorname{tg}\theta=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$　(或 $\operatorname{ctg}\theta$ 的公式，看哪个有定义)中，当 $\lambda_1=\lambda_2=i$(或 $\lambda_1=\lambda_2=-i$)时，右端分母分子同为零.

一般地，取一个迷向方向例如 $\lambda_1=-i$ 和其它另一方向 λ_2 ($\neq -i$)，代入(2)得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\lambda_2+i}{1-\lambda_2 i}=i\frac{\lambda_2+i}{\lambda_2+i}=i,$$

由上所述夹角 θ 也无定义. 证完.

定理 4　平面内任何两条垂线与无穷远直线 l_∞ 所成的交点关于 I,J 二点是调和共轭的.

证明　假设这两条垂线相交于 O 点，以 O 为心作任意圆，这个圆一定通过 I,J 两点，OI,OJ 为其渐近线. 因两线是垂直的，所以是圆的共轭直径. 由于二次曲线的两条渐近线调和分割任意一对共轭直径，所以这两条垂线和 l_∞ 的交点关于 I，J 是调和共

轭的.

这个定理很重要，因为它把垂直观念联系到调和共轭的观念里去了. 与这个定理有关的，是下面另一个重要定理.

定理5 （拉格儿(Laguerre)定理） 假设两条直线的交角是 α, 这两直线上的无穷远点与 I, J 二点所成的交比是 D, 那末，在对数函数的主值范围内，

$$\alpha=\frac{i}{2}\ln D.$$

证明 设两直线 l_1, l_2 的斜率为 $\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1<\lambda_2)$, 通过两线交点 O 的两迷向直线的斜率为 $i, -i$, 并注意 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$, 则

$$\begin{aligned}D&=(l_1l_2, l_il_j)=(\lambda_1, \lambda_2, i, -i)\\&=\frac{(\lambda_1-i)(\lambda_2+i)}{(\lambda_1+i)(\lambda_2-i)}\\&=\frac{(\lambda_1\lambda_2+1)-i(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1\lambda_2+1)+i(\lambda_2-\lambda_1)}\\&=\frac{1-i\,\mathrm{tg}\alpha}{1+i\,\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos\alpha+i\sin\alpha}\\&=\frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}}=e^{-2i\alpha}.\end{aligned}$$

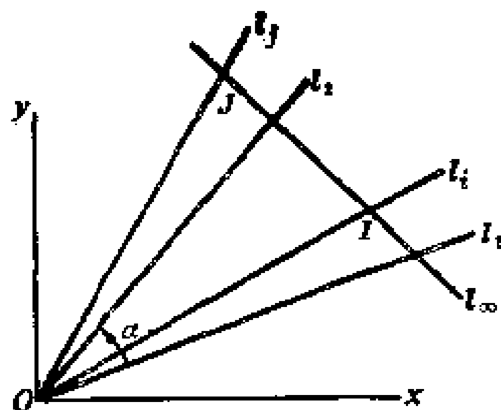


图 8.1

所以

$$\ln D=-2i\alpha,$$

即

$$\alpha=\frac{i}{2}\ln D.$$

系 当二直线与 l_∞ 之交点关于 I, J 两点成调和共轭时，那末这二直线一定互相垂直.

因为当 $D=-1$ 时，$\ln D=\ln(-1)=\ln(e^{-\pi i})=-i\pi$, 所以

$$\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

由这个系和定理 4 可知，二直线垂直的充要条件是它们与 l_∞ 的交点关于 I, J 两点成调和共轭，亦即该二直线被通过它们交点的两条迷向直线调和分割.

注意：有了两个共轭虚圆点 I, J；欧氏几何学里的垂直观念和射影几何学里调和共轭观念就联系起来了.

下面从射影几何学的观点去讨论圆的几个性质.

定理 6 平面内不在一直线上的三点可以决定一个常态圆.（读者自证）

定理 7 有公共渐近线的一切圆是同心圆.

因为 I, J 为切点，切于二直线的圆有无限多个，它们有公共渐近线，两条公共渐近线的交点就是圆心，所以这些圆有公共圆心.

定理 8 对同一圆弧的圆周角相等.

证明 设公弧是 $\overset{\frown}{AB}$，以 $\overset{\frown}{AB}$ 为圆弧的圆上有两点 I，J；（图 8.2），此外在圆上任意取两点 C, C'，于是由 6.1 节定理 4，

$$D = C(IJ, AB)$$
$$= C'(IJ, AB) = D'.$$

所以

$$\frac{i}{2}\ln D = \frac{i}{2}\ln D',$$

即是

$$\angle ACB = \angle AC'B.$$

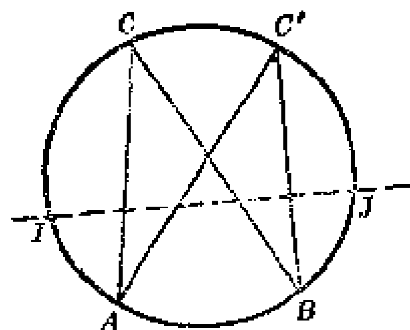


图 8.2

8.2 主轴与焦点

定义 所谓二次曲线的主轴，是指一根直径，它垂直于被它所平分的弦.

由此定义，我们知道：一对共轭直径如果互相垂直，那它们都是主轴. 如果二次曲线是抛物线，它所有的直径全是平行的，因此

垂直于这些直径的弦只有一组，平分这一组弦的直径只有一条，所以

定理 9 抛物线只有一条主轴.

由上所述，得抛物线主轴的作法：连接任意二平行弦的中点，得出一条直径．作两根弦垂直于此直径，连接这两弦中点所得的直线就是主轴.

因为圆的任意一对共轭直径是垂直的，所以圆的任意一条直径都是主轴.

这里讨论除圆以外的有心二次曲线．有心二次曲线可以有许多共轭直径对，每一对是同一对合对应的对应线，而且以两条渐近线为二重直线．共轭直径对固然有许多，可是共轭而又垂直的直径只有一对．事实上，假设有两对直径是共轭而又垂直的话，那末每对共轭直径都是垂直的（习题 3.32)．这些共轭直径对所成的对合将以 OI, OJ 为其二重直线．可是两条渐近线才是二重直线，所以 OI, OJ 将是二次曲线的渐近线．因此，二次曲线都过 I, J 两点，这只限于圆的情况才行．这正是我们事先排除的情况．因此有

定理 10 除圆以外的有心二次曲线只有一对主轴，它是两条渐近线所成交角的内外平分线.

以主轴作为笛氏坐标轴，我们得到同解析几何一样的四种二次曲线的标准方程.

定义 从 I, J 两点引常态二次曲线的切线，一般有四条，它们的有限交点（在有限处的交点）称为二次曲线的焦点，焦点的极线称为准线.

圆通过 I, J 两点，这时过 I, J 的切线即是圆的渐近线，它们的交点就是圆心，因此圆只有一个焦点，那就是圆心；只有一条准线，就是无穷远直线.

除圆以外的有心二次曲线，过 I, J 两点有四条切线(图 8.3)，因此它们有四个焦点，其中两个是实点，两个是虚点．两个实焦点不在同一切线上，否则这切线将是实切线，与事实不符合；如果以 F 和 F' 表示它们，就是普通的焦点．相应地，除圆以外的有心二次曲线有四条准线，两条是实的，两条是虚的．两条实准线就是普通说的准线．为了说明上面的事实证明下面的定理．

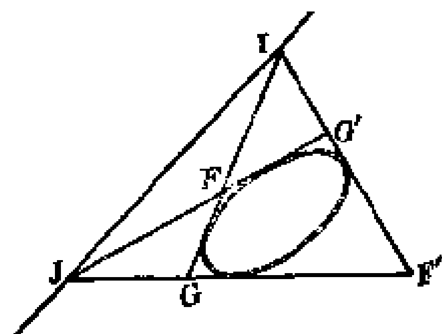


图　8.3

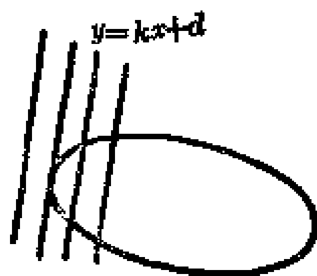


图　8.4

定理 11　我们所定义的关于有心二次曲线（除圆外）的两个实焦点就是通常意义下的焦点；关于准线也如此．

我们只就椭圆情况加以证明，双曲线同样证明．

证明　设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$，（图 8.4），它具有斜率 k 的一组平行弦的方程为 $y=kx+d$，求此椭圆具有斜率 k 的切线．将 $y=kx+d$ 代入

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,$$

得

$$b^2x^2+a^2(kx+d)^2-a^2b^2=0,$$

或

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2dkx+a^2(d^2-b^2)=0.$$

直线与椭圆相切的条件为：

$$a^4k^2d^2=(b^2+a^2k^2)a^2(d^2-b^2)$$

或

$$a^2b^2d^2=a^2b^2(a^2k^2+b^2),$$

所以

$$d=\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}.$$

因此这椭圆具有斜率 k 的切线方程为

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$$

这椭圆具有斜率 i，$-i$ 的切线方程为

$$y=ix\pm i\sqrt{a^2-b^2};\quad y=-ix\pm i\sqrt{a^2-b^2}.$$

令 $\sqrt{a^2-b^2}=c$，则迷向切线为（图 8.5）

$$p:\quad y=ix+ic,$$

$$q:\quad y=ix-ic,$$

$$\bar{q}:\quad y=-ix+ic,$$

$$\bar{p}:\quad y=-ix-ic.$$

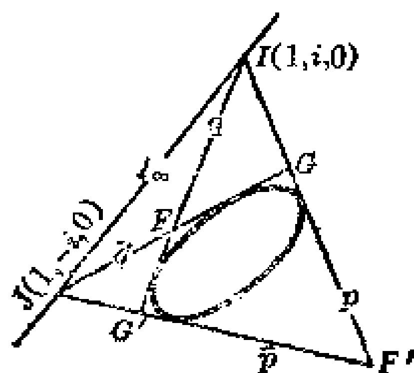


图 8.5

$F'=p\times\bar{p}$ 即$(-c,0)$；$F=q\times\bar{q}$即$(c,0)$；$G=p\times\bar{q}$ 即$(0,ic)$；$G'=\bar{p}\times q$ 即$(0,-ic)$.

所以 F,F' 是实的；G,G' 是虚的.

点 (x_1,y_1) 关于$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的极线为：

$b^2xx_1+a^2yy_1-a^2b^2=0$（见习题 6.20）.

所以 $F(c,0)$的准线为： $x=\frac{a^2}{c}$,

$F'(-c,0)$的准线为： $x=-\frac{a^2}{c}$,

$G(0,ic)$ 的准线为： $y=\frac{b^2}{ic}$,

$G'(0,-ic)$的准线为： $y=-\frac{b^2}{ic}$.

因此：两条准线是实的，两条是虚的，所得实的焦点与准线和习知的一致。

关于焦点，还有下面的定理。

定理 12　假设二次曲线Γ的任意一根切线和其它二定切线之交点是 P_1, P_2，而且有一个焦点 F，那末，$\angle P_1FP_2=$常数。

证明　设二次曲线的二定切线为 t_1, t_2；再由 I, J 两点各引一条切线，这四条切线看做是固定切线（图 8.6）。二次曲线的动切线交四定切线于四点 I', J', P_1, P_2。所以由 6.1 节定理 4

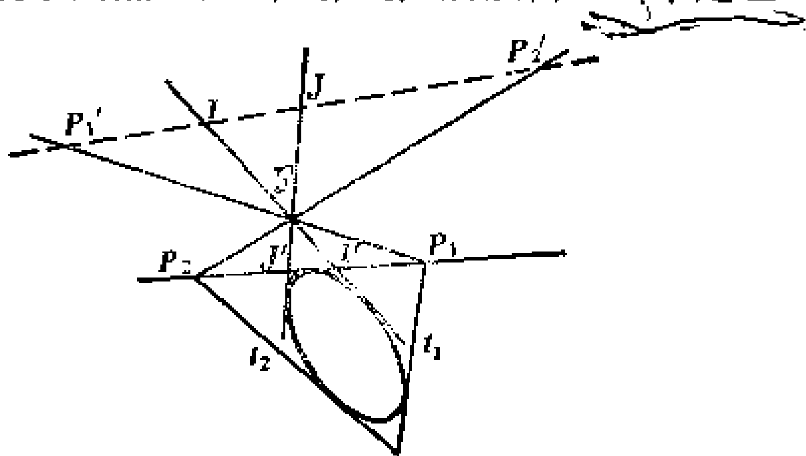


图　8.6

$$(I'J', P_1P_2)=\text{常数}.$$

以 F（由 I, J 二点所引切线的交点）为透视心，则 $(I'J', P_1P_2)=(IJ, P_1'P_2')=$常数。因此，由定理5

$$\angle P_1FP_2=\frac{i}{2}\ln(IJ, P_1'P_2')=\text{常数}.$$

习　　题

8.1　试证迷向直线与其本身所成的角度是不定的。

8.2　迷向直线上任何两点的距离等于零。

8.3　试求过原点的二直线 $ax^2+2hxy+by^2=0$ 所成的角。

解　设所求角为 α，二直线斜率为 m_1, m_2，则 m_1, m_2 由方程 $bm^2+2hm+a=0$ 给出，于是 $m_1+m_2=-2h/b$，$m_1m_2=a/b$。如果用解析几何公式，则

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{\pm\left[(m_1+m_2)^2-4m_1m_2\right]^{1/2}}{1+m_1m_2}$$

$$=\pm\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}.$$

如果应用拉格儿公式，那末令 P、Q 表二直线的无穷远点 I、J 表虚圆点，于是

$$\alpha=\frac{i}{2}\ln D \quad \text{即} \quad D=e^{-2i\alpha}.$$

且由欧拉公式 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{1}{2i}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})}{\frac{1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})}$

$$=-i\frac{1-e^{-2i\alpha}}{1+e^{-2i\alpha}}=i\frac{D-1}{D+1}.$$

由于 $D=O(PQ,IJ)=(m_1,m_2,i,-i)$

$$=\frac{(m_1-i)(m_2+i)}{(m_1+i)(m_2-i)}=\frac{(1+m_1m_2)-i(m_2-m_1)}{(1+m_1m_2)+i(m_2-m_1)},$$

把左端写成 $\frac{D}{1}$，应用分合比定理，便得

$$\frac{D-1}{D+1}=-i\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

回代得　$\operatorname{tg}\alpha=i\dfrac{D-1}{D+1}=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$,

这样就证出了解析几何公式，仍得上述结果。

从这里我们顺便得到一个结果：

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$

所表示的两条直线互相垂直的条件是

$$a+b=0.$$

8.4　试求二直线 $Ax^2+2Hxy+By^2=0$ 夹角平分线的方程。

8.5　二圆的方程各为

$$S_1=x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0,$$

$$S_2=x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0,$$

那末 $S_1+\lambda S_2=0$ 所表示的圆系称为共轴圆系。试证共轴圆系的中心在同一直线上。

8.6　证明一个定点关于共轴圆系中每一圆的极线通过另一定点。

8.7 证明以原点为中心的有心二次曲线可表为

$$Ax^2+2Hxy+By^2=1,$$

这里的 (x, y) 是笛氏坐标.

8.8 求有心二次曲线主轴的方程, 并证明它们是实直线.

解 以中心为原点, 有心二次曲线的方程为

$$Ax^2+2Hxy+By^2=1.$$

设主轴的方程为

$$ax^2+2hxy+by^2=0,$$

那末它们和渐近线

$$Ax^2+2Hxy+By^2=0$$

要成调和共轭, 这条件是(习题 3.9):

$$aB+bA-2Hh=0.$$

可是主轴的另一条件是彼此垂直, 所以(习题 8.3 解)

$$a+b=0.$$

由这两项条件得到

$$aB-aA-2Hh=0 \text{ 或 } \frac{a}{H}=\frac{2h}{B-A},$$

代进所假设的主轴方程里去, 就得到所求的方程如下:

$$H(x^2-y^2)-(A-B)xy=0.$$

因为 $(A-B)^2+4H^2>0$, 所以有心二次曲线的两条主轴是实的.

8.9 证明以主轴为坐标轴, 有心二次曲线的方程可写为

$$Ax^2+By^2=1.$$

但一般不能再简化为 $x^2+y^2=1$ 或 $x^2-y^2=1$.

8.10 证明外切于一抛物线的三角形, 它的外接圆通过抛物线的焦点.

8.11 证明过二次曲线的焦点引两条共轭直线, 那末, 这两线一定垂直.

几何基础

第九章　几何基础简介

本章介绍一点几何基础方面的常识，从几何发展略史谈到欧几里得(Euclid)原本、第五公设问题，直到近代公理法概要，并介绍罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский)几何初浅知识．主要是满足师范专科学校高等几何教学大纲的要求．

9.1　几何发展简史

文化发源地中国、印度、巴比伦、埃及都是大河流贯，土地肥沃，适宜农牧的好地方，造成古代农牧民族定居生存的优良条件．为了驯服和利用这些湍急的河流为农牧业生产服务，满足生产和生活的实际需要，产生和发展了技术和数学(特别是几何学)．测量土地，窥测天象、制定历法以利农牧，这是历代的大事．我国计算圆周率π常常与修订历法联系在一起．公元五世纪我国数学家祖冲之计算π准确到小数六位，比欧洲人早一千一百多年，就跟他制定大明历有关．我国古代搞土木建筑，计算面积、体积和谷仓的容积，累积了许多实践经验，留下许多公式．祖冲之的儿子祖暅计算球的体积，用奇妙的算法得到完全正确的公式．我国最早的数学书《周髀算经》和《九章算术》里有许多几何问题．由这两书可看到，圆周率和勾股定理我国早就知道了．这两书作者及著作年代尚无定论，但所记载的问题源流极古，有的上溯到周秦以前，也有两汉时代的算法．再推前一些，无论石器时代的陶器上，或殷商

的钟鼎上，都已有了精美的几何图案，说明我国几何学的历史是悠久的．战国时的墨翟(约公元前 480—390) 所著墨经十五卷，比欧几里得原本早一个多世纪，其中谈到圆是“一中同长”的图形(有一个中心，圆上各点到中心有相同长度)，谈到矩形是“柱隅四杂”(四杂即四条边，即矩形有四边，各角都是直角)．其后荀卿(约公元前 310—230)在他所著《荀子》一书中说，“四寸之矩尽天下之方也”，这与欧几里得第四公设“凡直角都相等” 同义．这些例子表明，几何学在中国古代已有了较高的水平．

从国外来说，几何学的发展可因其质变分为四个时期．

第一个时期是几何作为数学的萌芽时期，从人类积累生产、生活经验到大约公元前五世纪止．古代埃及积累了不少几何知识，特别是从尼罗河泛滥之后土地的重新测量，建筑许多金字塔．古埃及有了相似形的概念，掌握了四棱台求体积的公式 $V=h(a^2+ab+b^2)/3$．后来希腊人跟埃及通商，去埃及留学．根据希腊史家的记载，几何学于公元前七世纪传入巴比伦和希腊．埃及不成系统的几何知识跟希腊的逻辑相结合，几何有了质变．

第二个时期，几何成为数学的独立学科，希腊的几何传遍世界各地．在希腊，从公元前七到三世纪，几何学在塔列斯(Thales)、毕达哥拉 (Pythagoras)、德谟克里特 (Democritus)、柏拉图 (Plato)、欧道克斯(Eudoxus) 等哲学学派手中发展起来，以抽象化、逻辑化为其特点，这是埃及几何知识跟希腊逻辑方法相结合的产物．欧几里得(约公元前 330—275) 在前人的基础上写成《几何原本》，可以说是集埃及、希腊几何之大成．欧氏原本跟阿波罗尼(Apollonius，约公元前 260—170)关于圆锥曲线的著作是几何上十分成熟流传到后世的名著．七世纪阿拉伯人的势力到达希腊，文化中心东移到地中海东岸叙利亚一带．八世纪末九世纪初《原本》译成阿拉伯文，扩大了影响．八世纪初阿拉伯人的势力到达西

班牙,《原本》跟着到了欧洲. 1120年英教士阿德哈(Adelhard)译为拉丁文,从此《原本》在欧洲大学渐有地位,尤其在德国与意大利. 但在中学学习,则是印刷术发明以后的事,或者说中国早期发明的印刷术传到欧洲,对欧洲科学文化的传播发挥了积极作用. 1482年有拉丁版几何原本印行于威尼斯,此后以各国文字印行的欧氏原本不在500版以下. 世界科学著作流传时间之长、范围之广、影响之深远,古今中外无与伦比. 1570年始译为英文. 明万历卅五年(1607)徐光启和利玛窦(Metteo Ricci)合译原本前六卷于北京,清咸丰五年(1855)李善兰和伟烈亚力山大(Alexander Wylie)续译后九卷. 1739年原本译为俄文. 两千余年间,欧氏原本是所有数学家应读的课本,它是仅存的古代数学名著之一,这是历史对它作出的最好的评价.

很早在希腊就给几何增添了新内容,除上述阿波罗尼的圆锥曲线外,还有阿基米德(Archimedes,公元前三世纪)确定面积、体积的新方法,希巴尔卡(公元前三世纪)的三角法初步与梅耐劳(公元后一世纪)的球面几何.

第三个时期是因资本主义的萌芽促成欧洲文艺复兴而引起了几何学的重新繁荣. 关键的一步是十七世纪前半叶,由笛卡尔(Descart'es, 1596—1650)和费玛(Fermat, 1601—1665)引进坐标法解决几何问题. 这是划时代的革新,几何方法的革新跟当时正在发展的代数学和萌芽时期的解析学发生联系,相互促进,产生了解析几何以及后来的微分几何. 此后百余年内,代数的和解析的方法统治了几何学,几乎排斥了综合法(纯几何法). 但还有一些学者要将微积分奠基于几何,也得到新结果. 优美而直观明晰的几何方法总吸引着人. 因此在十七、十八世纪,纯几何虽不处于生气勃勃的发展中心,也还保持其惊人的活力. 十九世纪初,一些数学家认为过去的综合几何被不公平、不明智地忽视了,因而积极努

力来复兴并扩展它.

跟古代几何相比，几何学使用了全新的方法，研究了更普遍的图形. 在十八世纪由于欧拉和蒙日(Monge)等人的著作而产生的微分几何，已就足够光滑的曲线和曲面以及它们的族用各种变换来研究. 研究的范围逐步推广，也涉及到不光滑的线和面. 十七世纪前半叶在代沙格和巴斯卡的著作中找到射影几何的内容. 几何学这些新趋势的最后奠定以及有系统的表述，是在十八世纪、十九世纪初分别由欧拉给解析几何(1748)、蒙日给微分几何(1795)、庞斯雷给射影几何(1822)完成的. 跟绘图问题有直接联系的几何表示法的研究更早(1799)，这就是蒙日的画法几何，它在工业生产上的作用是尽人皆知的.

在所有这些分支中，几何学的基础没有变，仍旧跟欧几里得的基础一样. 但所研究的图形及其特性，以及所使用的方法，都扩大了范围，提高了境界和水平. 产业革命时期生产上技术上种种探求的需要以及严正科学自身发展的需求，正是促进这些分支发展的原因，反转来它们也推进了生产和科学技术的发展.

第四个时期是从罗巴切夫斯基(1793—1856)建立了第一种非欧几何开始的. 他的论文1826年宣读，1829年以发展完备的形式印出. 几千年来人们认为客观空间由欧氏几何唯一地描述，通过直线 u 以外一点 P 在 P 和 u 决定的平面上有一条且仅一条直线跟 u 不相交，三角形的内角和等于二直角. 现在罗氏建立了与此完全不同的几何学，通过 P 在所说的平面上有无数条直线跟 u 不相交，三角形的内角和小于二直角. 无怪俄国当时最大的两位数学家把这说成是荒唐. 这种几何德国的高斯和匈牙利的波里埃(J. Bolyai, 1802—1860)也独立建立起来，发展得最完善的是罗巴切夫斯基. 当人们公认这种几何学的时候，这三个人都已进入坟墓了. 另一种非欧几何后来由德国黎曼(B. Riemann, 1826—

1866)建立，经过 P 在所说的平面上没有任何直线跟 u 不相交，三角形内角和大于二直角.

克莱因把罗氏、欧氏、黎氏几何分别称为双曲、抛物、椭圆几何，并在 1872 年就各种几何的发展作出总结，指出它们结构上的一般原则(见 5.11 节).

罗巴切夫斯基的发现等于发现了新大陆，人们称他为“几何学中的哥白尼”．这是一次数学思想上的巨大进展，扩大了对空间的认识．几何学变成研究各种不同空间(欧氏空间、罗氏空间、黎氏空间、仿射空间、射影空间、…)以及这各别空间图形的数学理论的总体.

在认识到空间概念多样化的同时，感到欧几里得建立他的几何学的基础远远不够完善，新兴了一门几何分支即初等几何基础．射影几何、微分几何、几何基础成了十九世纪几何方面大放光芒的三大分支.

许多科学家参加了促使几何基础结构更新的工作．著名的物理学家赫姆霍尔兹(Helmholtz，1821—1894)在 1866 年提出运动概念对于欧氏几何是基本的．1871 年康托(M. Cantor，1829-1920)、1872 年戴德金(R. Dedekind，1831—1916)拟了连续公理．1882 年帕须(M. Pasch)拟了顺序公理．最后 1899 年希尔伯特(D. Hilbert，1862—1943)发表了集大成的名著《几何基础》，成为欧几里得几何的完善的公理法结构.

十九世纪的一些发展结晶成为几何学另一新分支——拓扑学，它是研究图形在被弯曲、伸缩或任意形变下(但在变形过程中，不同的点不允许变为相同的点，不准产生新的点)被保持不变的性质的科学．这个分支现在已渗透到代数、复变函数、群论等许多数学分支甚至其它学科.

9.2 欧几里得第五公设问题

现在回过头来谈谈第五公设问题．欧氏几何原本的基础结构是定义、公设和公理的系统．第一卷一开始提出二十三个定义，这里引其最初八个：

定义

1. 点没有部分．
2. 线有长度没有宽度．
3. 线的界限是点．
4. 直线是这样的线，它上面的点是同样放着的．
5. 面只有长度和宽度．
6. 面的界限是线．
7. 平面是这样的面，它上面的直线是同样放着的．
8. 平面上的角是平面上两相交直线相互的倾斜度．

定义之后列出公设和公理各五条：

公设(涉及几何内容)

I．从任一点到另一点可以作直线．

II．一条有限直线可以无限延长．

III．以任意点为中心，以任意长为半径可以作圆周．

IV．凡直角都相等．

V．平面上两直线被一直线所截，若截线一侧的两内角之和小于二直角，则此两线必相交于截线的这一侧．

公理(涉及一般逻辑的概念)

1. 等于同一量的量彼此相等．
2. 等量加上等量，其和仍相等．
3. 等量减去等量，其差仍相等．
4. 相互合同的就是相等的．

5. 全量大于部分.

凭古希腊的哲学和逻辑，欧几里得以其过人的努力，深思熟虑，对公理、公设做了特定的选择，把前人的定理由浅入深做了合于逻辑顺序的排列，给出清晰易明的证明，这是他不朽的功绩。他的原本一出，前人在这一方面的著作就逐渐被遗忘了.

但是用现代数学观点看《原本》，则许多方面不能令人满意. 例如定义表中的一些概念本身，如"界限"、"长度"之类，就是应该加以定义的；又如"在直线上两点之间的已知点"、"在直线同侧的两点"等叙述中，书上从未给出这些概念；证明中藉助于图形的直观，这是严格的逻辑结构所不允许的；欧氏没有定义运动而用了运动的概念(如公理 4)；等等.

欧氏用作证明依据的定义、公设、公理表中，特别引人注意的是第五个公设. 这是因为：第一，它没有其它公理那样简单容易接受；第二，可能连欧氏本人也曾试证过公设 V，因为原本前二十八个命题都未利用过公设 V，似乎他是努力推迟公设 V 的应用，直到迫切需要无可奈何的时候.

历代都有人企图把公设 V 从欧氏表上挪走，用其余的公设、公理将它当作定理证出来，这就叫做第五公设问题. 用的是反证法，假设公设 V 不成立，希望在一长串推理中能得出两个互相矛盾的命题，以反证公设 V 成立. 这些人都没有成功，有的以为成功了，乃是在某一阶段犯了一点错误，或是在不知不觉之中引用了一个实质上跟公设 V 等价的命题.

成功的经验是可贵的. 失败的教训也是可贵的，吃一堑，长一智，这些人成了非欧几何的先趋者，得出非欧几何的一批性质.

凡不用公设 V 就能证明的命题称为绝对几何命题，例如：对顶角定理；三角形合同定理；等腰三角形两底角相等；三角形中大边所对的角也较大(以及逆定理)；三角形的外角定理(每一外角大

于任一不相邻的内角);三角形的一边小于另两边之和; 平面上两直线被一直线所截,若同位角相等,则该两直线平行(它的逆命题则不是绝对几何命题而是欧氏几何命题).

企图证明第五公设就是企图把它化为绝对几何命题,两千年证明失败,表明把第五公设、放在基础的表里,欧几里得是做对了.

下面我们略略介绍几个对第五公设试证的工作.

9.2.1 普雷菲(Playfair)公理与第五公设等价

1795 年普雷菲提出一条跟欧氏公设 V 等价的命题,它的直观明显性比公设 V 好些,通称欧几里得几何平行公理:通过直线外一点有唯一直线与该线平行.

先证公设 V 蕴涵平行公理.

设 u 为平面上一已知直线,M 是不在 u 上的任一已知点,求证有唯一直线通过 M 而与 u 不相交.

作 $MN\perp u$ 于点 N(图 9.1),用 u' 表示在 M 与 MN 垂直的直线,则 u' 不可能与 u 相交,否则 u, u', MN 将构成一三角形,与外角定理矛盾. 平行线的存在性证明了. 再设 u'' 是通过 M 与 u' 相异的任一直线,那末 u'' 必然在直线 MN 的某一侧跟 MN 组成锐角. 应用眼前的假设公设 V 于两直线 u, u'' 及截线 MN,可知 u'' 必与 u 在这一侧相交.

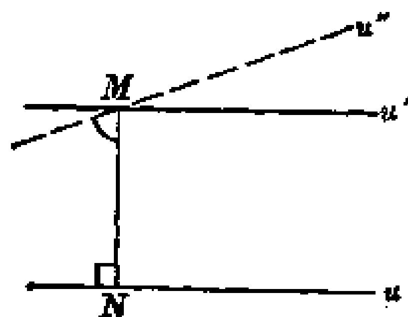


图 9.1

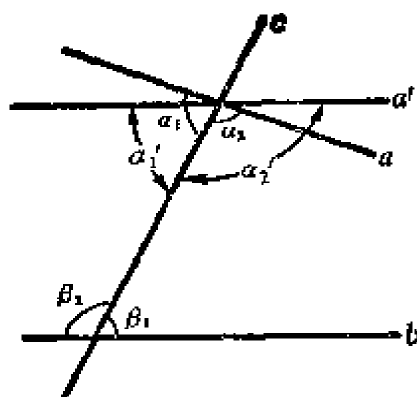


图 9.2

再证平行公理蕴涵公设 V.

设直线 a, b 被直线 c 所截，在 c 一侧的内角之和(图 9.2)

$$\alpha_2+\beta_1<2d \qquad (d \text{ 表直角}),$$

从而另一侧内角和

$$\alpha_1+\beta_2>2d.$$

通过 a 跟 c 的交点引直线 a'，使其与 c 所成的角 α'_1, α'_2 满足

$$\alpha'_2+\beta_1=2d, \qquad \alpha'_1+\beta_2=2d.$$

于是 $\alpha'_1=2d-\beta_2=\beta_1$, 所以 $a' /\!/ b$, 因为若 a' 跟 b 相交，要得出与外角定理相矛盾的结果.

由假设通过 a, c 的交点只有一直线与 b 平行，所以与 a' 相异的直线 a 必与 b 相交. 还要证明 a 和 b 相交于 α_2 和 β_1 所在的一侧，这可从 $\alpha_1>2d-\beta_2=\beta_1$ 以及外角定理立即得出.

9.2.2 萨开里(D. Saccheri, 1667—1733)的试证

1733 年意大利数学家萨开里出版了名为《免除一切污点的欧几里得》，这里“欧几里得”指《原本》. 在这里他对第五公设的试证工作发展得相当远，得到一系列结果. 如果在关键的时刻他再推进一步，高斯、波里埃和罗巴切夫斯基的发现就可提前一世纪. 他的后继人也没做这样的工作. 似乎他的工作被人遗忘了. 后来意大利有名的数学家倍尔脱拉米(Beltrami, 1835—1900)才指出，一般归之于勒戎得、罗巴切夫斯基、波里埃的一些定理，萨开里已发现过了.

他讨论一种四角形被称为“萨开里四角形”，两下底角是直角，两侧边相等(图 9.3):

$$AC=BD, \qquad \angle A=\angle B=d.$$

定理 1 *在四边形 $CABD$ 中，若*

$$\angle A=\angle B=d \quad \text{且} \quad AC=BD, \text{则}$$

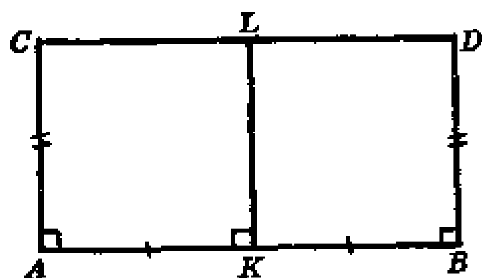


图 9.3

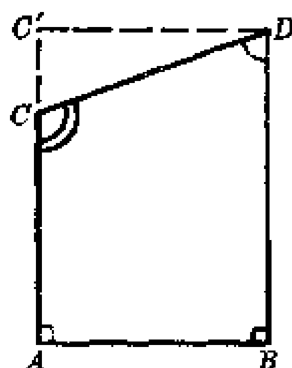


图 9.4

$$\angle C=\angle D.$$

证明，我们只需取下底 AB 的中垂线 KL 为对称轴折叠即得。

由此推出 $\angle KLC=\angle KLD=d,\qquad CL=LD.$

即是说：*萨开里四角形两底中点的联线是两底的中垂线.*

定理 2 *设四边形 $ABDC$ 中 $\angle A=\angle B=d$，且 $AC<BD$，则 $\angle C>\angle D$.*

证明 延长 AC 至 C'（图 9.4）使 $AC'=BD$，则按定理 1 有

$$\angle C'=\angle C'DB>\angle D.$$

又在$\triangle DCC'$ 应用外角定理得 $\angle C>\angle C'$．所以

$$\angle C>\angle C'>\angle D.$$

萨开里关于他的四角形 $CABD$ 曾做过三种假设：

(1) 锐角假设：$\angle C=\angle D<d$，于是推出 $CD>AB$，并且三角形的内角和小于二直角.

(2) 直角假设：$\angle C=\angle D=d$，于是推出 $CD=AB$，并且三角形的内角和等于二直角.

(3) 钝角假设：$\angle C=\angle D>d$，于是推出$CD<AB$，并且三角形的内角和大于两直角.

由于推理步骤相似，我们只就锐角假设讨论.

定理 3 *在锐角假设下有 $CD>AB$.*

证明 既然假设 $\angle C<d=\angle A$(图 9.5),

又由定理 1 $\angle K=\angle L=d$,

于是鉴于定理 1 和 2 从四角形 $AKLC$ 得

$$CL>AK.$$

故有

$$CD=2CL>2AK=AB, \text{即} \quad CD>AB.$$

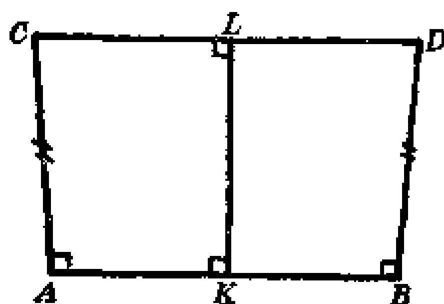


图 9.5

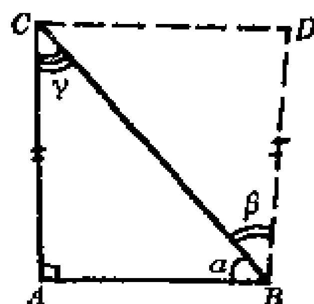


图 9.6

定理 4 在锐角假设下,三角形的内角和小于两直角.

证明 由于一个三角形可分解成两个直角三角形[1],我们只须就直角三角形加以证明. 设(图 9.6)在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=d$. 如图作 $BD\perp AB$ 并取 $BD=AC$, 则 $CABD$ 为萨开里四角形. 于是由锐角假设和定理 3, $CD>AB$. 现在就 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 看, 有两边相等而第三边不等, 所以 $\beta>\gamma$, 从而有

$$\alpha+\gamma<\alpha+\beta=d(\text{作图}),$$

所以 $\angle A+\alpha+\gamma<2d.$

萨开里证明过,只要在一个萨开里四角形中, 上底角是直角, 那末公设 V 就成立. 他象所有数学家一样相信直角假设成立而另外两个假设必须抛弃. 他首先把钝角假设导致矛盾, 所以只要将锐角假设也导致矛盾, 那末公设 V 就证明了. 他从锐角假设出发得出一系列属于罗巴切夫斯基几何的命题, 尽管这些命题与我们

① 读者自证,三角形的高线是必有一个在边上而不在边的延长线上.

的直观不相符，却找不到一个逻辑矛盾. 但在一连串正确推理以后，他发现倘若锐角假设成立，那末无限地接近的两直线在无穷远点应有共同的垂线，他认为这是"与直线的本质抵触的."于是他认为第五公设证明了. 明白地，他本人也感到锐角假设的逻辑矛盾并未找到，他重新回到证明它"自相矛盾"的问题. 为此，他用两种方法计算一条线段的长度，得到两个结果，他认为找到矛盾了. 实际是他计算中有错误.

9.2.3　勒戎得(Legendre, 1752—1833)的试证

勒戎得不仅在分析和力学方面有出名的工作，在几何方面也很有成就. 1794 年他的著作《几何原理》对后来的教科书有很大的影响. 他试证公设 V 时讨论了三种互相排斥的假定:

I. 三角形的内角和大于两直角，

II. 三角形的内角和等于两直角，

III. 三角形的内角和小于两直角.

他用正确的推理把第一个假定推向矛盾，若能把第三个假定也引向矛盾，那就证明了三角形内角和等于两直角，同时也就证明了公设 V. 可惜在把第三个假定引向矛盾时，他自己不觉察用上一个与公设 V 等价的命题.

定理 I　*如果每个三角形的内角和等于二直角，则公设 V 成立.*

证明　设每个三角形的内角和为二直角，又设 a 为一直线，A

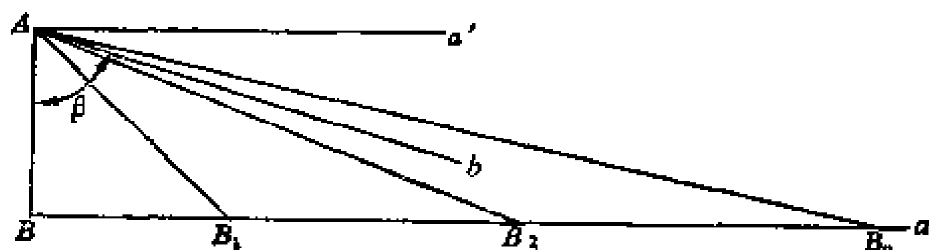


图 9.7

为其外一点．求证通过 A 只有一直线与 a 不相交(图 9.7)．

作 $AB \perp a$ 于 B，并过 A 作直线 $a' \perp AB$，我们知道 a' 与 a 不相交．

设 b 是通过 A 的任意直线，而 β 是 b 与线段 AB 所成的锐角．我们来证明直线 b 与直线 a 相交在锐角所在的一侧．为此，在直线 a 上锐角所在的一侧作点 B_1 使 $BB_1=AB$．再在同一侧作 B_2 使 $B_1B_2=AB_1$．一般，作点 B_n 使 $B_{n-1}B_n=AB_{n-1}$．我们来观察三角形 $ABB_1, AB_1B_2, \cdots, AB_{n-1}B_n$．因为假设每个三角形的内角和为 π，所以在等腰 $\triangle ABB_1$ 中，顶点为 A 和 B_1 的内角都等于 $\pi/4$．由此推出 $\triangle AB_1B_2$ 中顶点为 B_2 的内角等于 $\pi/8$．一般，在 $\triangle AB_{n-1}B_n$ 中顶点为 B_n 的内角等于 $\pi/2^{n+1}$．因之

$$\angle BAB_n=\pi/2-\pi/2^{n+1}.$$

既然设 β 为锐角，就有 $\beta=\pi/2-\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$．取 n 充分大，使

$$\pi/2^{n+1}<\varepsilon①,$$

于是有

$$\beta<\angle BAB_n.$$

这样，直线 b 夹在 $\triangle BAB_n$ 的边 AB 和 AB_n 中间，因此它与直线 a 应相交于点 B 与 B_n 之间．即是说，通过 A 只有直线 a' 与 a 不相交．证完．

现在让我们回过来讨论三角形的内角和问题，并引进两符号．设 ABC 为一三角形，则

$$S(ABC)=A+B+C,\quad D(ABC)=\pi-S(ABC)$$

分别称为这三角形的角和和角亏(或亏值)．

定理 II 在每个三角形 $\triangle$ 中，$S(\triangle)\leqslant\pi$(因之 $D(\triangle)\geqslant 0$)．

证明 设 $\triangle ABC$ 的内角为 α，β，γ，并设定理的反面成立：

$$\alpha+\beta+\gamma>\pi(\text{图 } 9.8).$$

① 这里用着阿基米德公理．

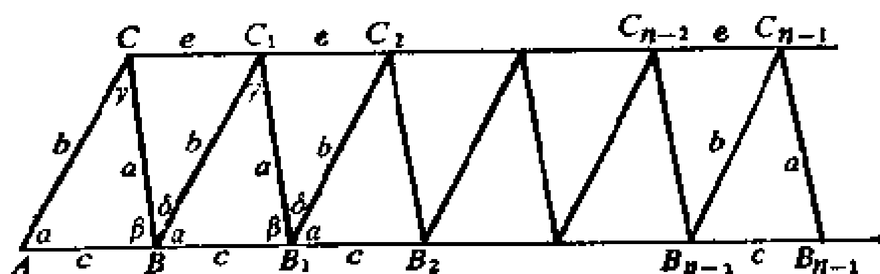


图　9.8

延长边 AB，并在其上作 $n-1$ 个三角形 BB_1C_1，$B_1B_2C_2, \cdots$，$B_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}$ 使与 $\triangle ABC$ 都合同．以 δ 表示角 $\pi-\alpha-\beta$，则

$$\delta=\pi-(\alpha+\beta)<\gamma.$$

易见三角形 $CBC_1, C_1B_1C_2, \cdots, C_{n-2}B_{n-2}C_{n-1}$ 都合同，因之

$$CC_1=C_1C_2=\cdots=C_{n-2}C_{n-1}=e.$$

由于$\triangle ABC$ 和$\triangle CBC_1$ 有两边分别相等而夹角不等，因之有 $c>e$．写出折线 $ACC_1C_2\cdots C_{n-1}B_{n-1}$ 的长度大于封闭线段 AB_{n-1}，得

$$b+(n-1)e+a>nc \quad 或 \quad n(c-e)<a+b-e.$$

因
$$a+b-e>c-e>0,$$

可见若定理 II 的反面成立，那末不论正整数 n 为何值总有

$$n(c-e)<a+b-e,$$

与阿基米德公理抵触．因此定理 II 得到反证．

注意：在此证法中用过阿基米德公理，曾无限延长一直线，因之在非阿基米德空间或空间不是无穷的，定理 II 就未必成立．

* **定理 III**　只要有一个三角形的内角和等于二直角，那末每个三角形的内角和等于二直角．

先证几个引理．

引理 1　设 $\triangle ABC$(图 9.9) 被截线 BP 分为两个三角形，则它的角亏等于两个部分三角形

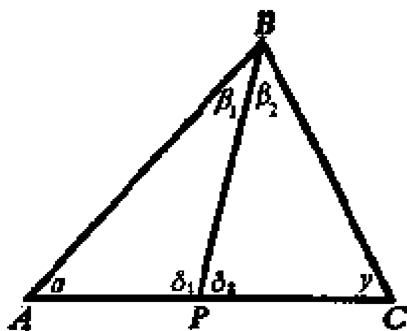


图　9.9

的角亏之和。

事实上，
$$D(ABP)=\pi-(\alpha+\beta_1+\delta_1),$$
$$D(BPC)=\pi-(\beta_2+\delta_2+\gamma),$$

因之
$$\begin{aligned}D(ABP)+D(BPC)&=2\pi-(\alpha+\beta_1+\beta_2+\delta_1+\delta_2+\gamma)\\&=2\pi-(\alpha+\beta_1+\beta_2+\pi+\gamma)\\&=\pi-(\alpha+\beta_1+\beta_2+\gamma)\\&=D(ABC).\end{aligned}$$

引理 2 设 B_1, C_1 是 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 上的点(图 9.10)，则 $\triangle AB_1C_1$ 的角亏不会超过 $\triangle ABC$ 的角亏。

事实上，由定理 II，三角形的角亏是大于或等于零的，于是由引理 1 得

$$\begin{aligned}D(ABC)&=D(ABC_1)+D(BC_1C)\\&=D(AB_1C_1)+D(B_1C_1B)+D(BC_1C),\end{aligned}$$

所以
$$D(AB_1C_1)\leqslant D(ABC).$$

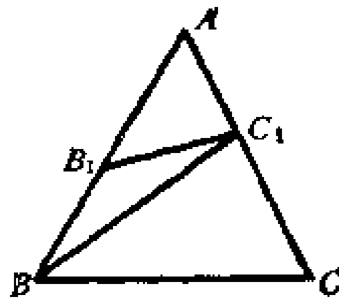


图 9.10

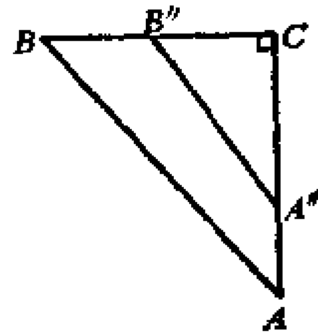


图 9.11

引理 3 设在两个直角三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中，直角边 AC 和 BC 分别大于直角边 $A'C'$ 和 $B'C'$，并设 $\triangle ABC$ 的内角和为两直角，则 $\triangle A'B'C'$ 的内角和也等于两直角。

移动 $\triangle A'B'C'$ 使 C' 重合于 C 且 A'，B' 分别落在 AC，BC 上 A''，B'' 处(图 9.11)。由引理 2，

$$D(ABC)\geqslant D(A''B''C)=D(A'B'C').$$

由假设 $D(ABC)=0$，又由定理 II，$D(A'B'C')\geqslant 0$. 可见

$$D(A'B'C')=0 \text{ 即 } S(A'B'C')=\pi.$$

引理 4 设有一个直角三角形内角和为二直角，则每个直角三角形的内角和都是二直角.

我们来讨论两个直角三角形 ABC 和 $A'B'C'$. 已知 $\triangle ABC$ 的内角和为二直角，要证 $\triangle A'B'C'$ 内角和也是二直角. 如果前者两条直角边分别大于后者的直角边，则结论由引理 3 立刻得到. 如果 $\triangle ABC$ 至少有一条直角边短于 $\triangle A'B'C'$ 的直角边，则为了证明引理 4，我们可作出一个新的直角三角形使其内角和象 $\triangle ABC$ 一样等于两直角，而它的直角边有充分大的长度. 这只要在 $\triangle ABC$ 旁加添一个全等的 $\triangle BAC''$(图 9.12)，使斜边重合而所得的四边形对边相等. 因 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC''$ 的内角和都等于两直角，显见四边形 $ACBC''$ 的内角都是直角. 于是移动 $ACBC''$ 就可用相等的矩形铺满平面.

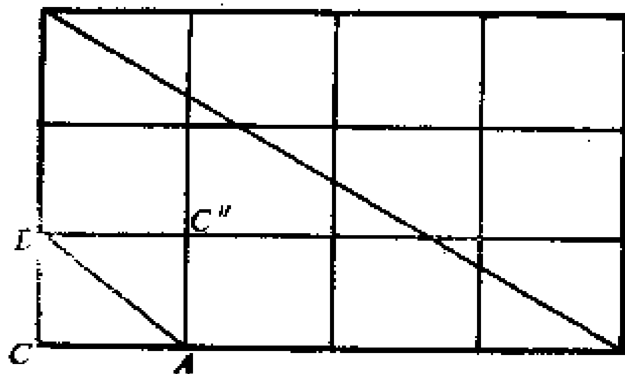


图 9.12

容易知道图上用粗线表示的是矩形，用对角线分它成两个全等的直角三角形，它们的内角和都等于两直角. 这样的直角三角形的直角边，显然可以做到有适当的长度①.

既然可以作出一个直角三角形，其内角和为二直角，而其直角

① 此地实际也已用到阿基米德公理和空间的无限性.

边都大于 $\triangle A'B'C'$ 的直角边，应用引理 3，可知随意取的直角三角形 $A'B'C'$ 的内角和等于两直角.

我们已可证明定理 III 了：只要有一个三角形它的内角和等于两直角，则每个三角形的内角和都是二直角.

设有 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，已知 $S(ABC)=\pi$，求证 $S(A'B'C')=\pi$.

作出两个三角形所有的高，其中至少各有一个顶点的高它的垂足落在对边上而不在边的延长线上. 分别取适当的记号，无妨设这样的顶点在 $\triangle ABC$ 是 A，而在 $\triangle A'B'C'$ 是 A'（图 9.13）.

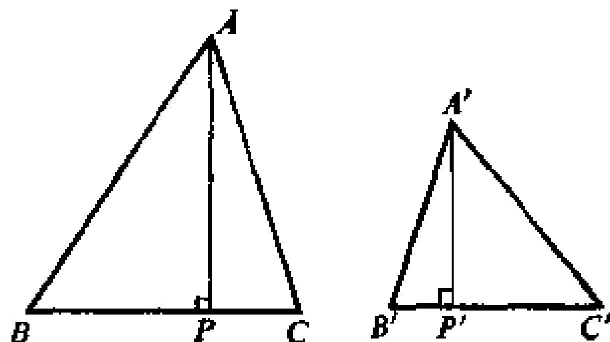


图 9.13

记所说的高为 AP 和 $A'P'$. 按引理 2，

$$D(ABP)\leqslant D(ABC);$$

由假设，$D(ABC)=0$；而由定理 II，$D(ABP)\geqslant 0$；所以得 $D(ABP)=0$，即 $S(ABP)=\pi$.

既有了一个直角$\triangle ABP$ 其内角和为 π，按引理 4 有

$$S(A'B'P')=\pi,\qquad S(A'P'C')=\pi.$$

相加得

$$S(A'B'C')=\pi.$$

确立了定理 I-III，人们自然想方设法证明这样一个命题：有一个三角形存在，它的内角和等于二直角. 因为如果这样一个三角形找到了，按定理 III，每个三角形的内角和都等于二直角，再应用定理 I，就证出公设 V 了.

下面是这命题的一个错误的证明，请注意错在何处.

设有任一锐角 O(图 9.14)，取其一边上一点 B 向另一边作垂线 BA. 由定理 II，$\triangle OAB$ 的内角和不会超过二直角，即 $D(OAB)\geqslant 0$. 我们要证明的是 $D(OAB)=0$.

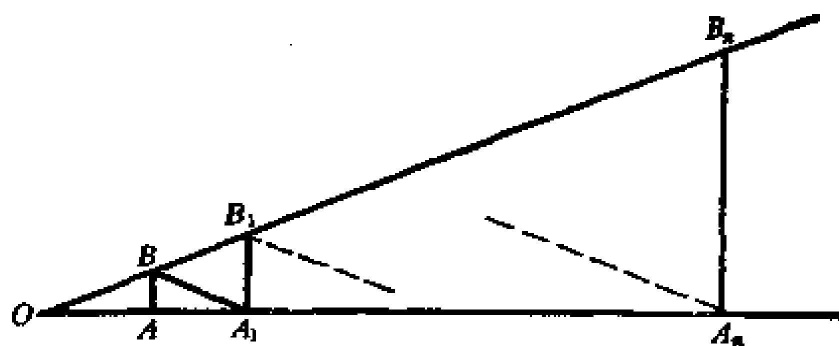


图 9.14

假如相反地 $D(OAB)=\varepsilon>0$，在边 OA 上取点 A_1 使有 $AA_1=OA$，联 BA_1，并在 A_1 作直线 OA 的垂线. 此垂线与直线 OB 的交点用 B_1 表示. 由引理 1，

$$D(OA_1B_1)=D(OAB)+D(BAA_1)+D(BA_1B_1).$$

$\triangle OAB$ 跟 $\triangle A_1AB$ 合同，因此 $D(BAA_1)=D(OAB)=\varepsilon$，而

$$D(OA_1B_1)\geqslant 2\varepsilon.$$

再在已知角的边 OA 上取点 A_2 使 $A_1A_2=OA_1$，在 A_2 引 OA 的垂线，用 B_2 表示它与直线 OB 的交点. 仿上得

$$D(OA_2B_2)\geqslant 4\varepsilon.$$

继续如此，我们作出 $\triangle OA_nB_n$ 满足

$$D(OA_nB_n)\geqslant 2^n\varepsilon.$$

取充分大的 n 使 $2^n\varepsilon>\pi$，就得出 $D(OA_nB_n)>\pi$. 但三角形的角亏不可能大于 π. 所以反证了 $D(OAB)=0$，$S(OAB)=\pi$. 由上所说，公设 V 也就证明了.

这番议论的弱点在于：没有证明点 B_k 的存在而利用了它们！要证明这些 B_k 存在，不利用公设 V 是不行的.

9.3 第五公设的等价命题

下面我们罗列一些命题，其中每一个都跟公设Ⅴ等价．有一些是容易证明的，有的证过了．其中不少的命题就是历代数学家在试证第五公设时不知不觉引进来的，他们以为证明成功了，实质上只不过用了另一个命题替代了第五公设．

1．通过直线外一点只能引唯一直线和它平行（Playfair，1795）．

2．两条平行线被第三线所截，同位角相等．

3．在已知直线同侧与它有同样距离的点组成一直线．

4．从两平行线中一条上的点到另一线的距离都相等．

5．三角形的内角和等于两直角．

6．相似三角形存在(Wallis)．

7．一直线的垂线和斜线总相交(Legendre)．

8．平面上存在一个内角和为 $2d$ 的三角形(Saccheri-Legendre)．

9.4 近代公理法的产生及希尔伯特公理体系

十九世纪后期，罗巴切夫斯基和波里埃的著作，以及高斯给朋友谈论新几何的信件，被人们公认了，几何基础得到巨大的发展．人们的认识提高了，空间模式不止由欧氏几何刻划的一种，欧几里得叙述初等几何的方式有待革新，近代公理法应运而生．许多第一流的数学家，如黎曼、倍尔特拉密、戴德金、克来因、S．李(Sophus Lie, 1842—1899)、帕须、潘加雷(Poincar'é, 1854-1912)等解决了初等几何基础中最难的问题，集大成的是1899年希尔伯特的《几何基础》．在这本书里，希尔伯特不仅给欧几里得几何提供了完善的公理体系，还给出证明一个公理对别的公理的独立性以及

一个公理体系确实为完备的普遍原则.

公理化就是抽象化. 几何空间是叫做几何元素的"对象"或"物"的集合,它们相互间的关系满足一定的公理要求. 这样,所谓欧几里得空间可以看作满足欧几里得几何公理要求的元素的集合,所谓罗巴切夫斯基空间可以看作满足罗巴切夫斯基几何公理要求的元素的集合.

只有从几何里将所有与感性的感觉有关的那些去掉,只保留它的逻辑骨架,才能用不同的具体材料把它充实起来. 因此,在几何的抽象逻辑结构下,不但不会丧失现实的基地,反而会扩大几何命题的范围. 抽象不是凭空想象,而是广泛实践经验的总结,因此抽象的结果能指导更多的实践.

以下我们要考察称为几何元素的三组对象,即点、直线和平面. 我们以大写、小写拉丁字母和希腊字母分别表示点、直线和平面. 为了简化叙述,当我们说两点、三直线、四平面时,指的是互异的点、直线、平面. 这里的叙述按希氏几何基础第七版(1930),但有两点改动,一是将它的第四组平行公理与第五组连续公理对调,使前四组公理成为绝对几何公理; 另一是将连续公理的第二个公理完备公理换为容易理解些的康托公理.

下面是希尔伯特的五组二十条公理表.

第一组 接合公理

I_1 通过任意给定的两点有一直线.

I_2 通过任意给定的两点至多有一直线.

I_3 每一直线上至少有两点; 至少有三点不同在一直线上.

I_4 通过任意给定的不共线三点有一平面; 每一平面上至少有一点.

I_5 至多有一平面通过任意给定的不共线三点.

I_6 若直线 a 的两点 A,B 在平面 α 上, 则 a 上所有点都在 α

上. 这时直线 a 称为在平面 α 上,或平面 α 通过或含有 a.

I_7 若两平面有一公共点,则至少还有一公共点.

I_8 至少有四点不同在一平面上.

第二组 顺序公理

II_1 若点 B 介于两点 A,C 之间, 则 A,B,C 是一直线上的互异点,且 B 也介于 C,A 之间.

II_2 对于任意两点 A,B,直线 AB 上至少有一点 C 存在,使 B 介于 A,C 之间.

II_3 在共线三点中,一点介于其它两点间的情况不多于一次.

II_4 (帕须公理)设 A, B,C 是不共线的三点, a 是平面 ABC 上不通过 A,B,C 中任一点的一直线, 则若 a 有一点介于 A, B 之间,那末它必还有一点介于 A,C 之间或介于 B,C 之间.

第三组 合同公理

III_1 设 A,B 为一直线 a 上两点,A' 为同一或另一直线 a' 上的点, 则在 a' 上点 A' 的给定一侧有一且只一点 B' 使线段 AB 合同于或等于线段 $A'B'$: $AB=A'B'$. 并且对于每一线段,要求 $AB=BA$.

III_2 设线段 $A'B'=AB$, $A''B''=AB$, 则也有 $A'B'=A''B''$.

III_3 设 AB 和 BC 是直线 a 上没有公共内点的两线段, 而 $A'B'$ 和 $B'C'$ 是同一或另一直线 a' 上的两线段, 也没有公共内点. 如果这时有 $AB=A'B'$, $BC=B'C'$,则也有 $AC=A'C'$.

III_4 在平面 α 上给定 $\angle(h,k)$,在同一或另一平面 α' 上给定直线 a', 而且在平面 α' 上指定了关于直线 a' 的一侧. 设 h' 是直线 a' 上以一点 O' 为原点的射线. 那末在平面 α' 上直线 a' 的指定一侧,有一条且只有一条以 O' 为原点的射线 k' 使 $\angle(h,k)=\angle(h',k')$. 每个角都要求与自身合同,即 $\angle(h,k)=\angle(h,k)$ 以及 $\angle(h,k)=\angle(k,h)$.

即是说：每个角可以唯一地放在给定平面上给定射线的给定一侧.

III₅ 设 A, B, C 是不共线三点，而 A', B', C' 也是不共线三点，如果这时有

$$AB=A'B', AC=A'C', \angle BAC=\angle B'A'C',$$

那末也就有

$$\angle ABC=\angle A'B'C', \angle ACB=\angle A'C'B'.$$

第四组 连续公理

IV₁ （阿基米德公理）设 AB 和 CD 是任二线段，那末在直线 AB 上存在着有限个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，排成这样：A_1 介于 A 和 A_2 之间，A_2 介于 A_1 和 A_3 之间，以下类推，并且线段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 都合同于线段 CD，而且 B 介于 A 和 A_n 之间（图 9.15₁）.



图 9.15₁

IV₂ （康托公理） 设在一直线 a 上有由线段组成的一个无穷序列 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots$，其中在后的每一线段都被包含在前一个内部，并且任意给定一线段，总有一足码 n 使线段 A_nB_n 比它小. 那末在直线 a 上存在一点 X 落在每个线段 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots$ 的内部（图 9.15₂）.



图 9.15₂

第五组 平行公理

通过直线外一点至多可引一直线平行于该直线.

需要声明一下，这公理表中有些词句的意义（例如线段、线段

的内点、一直线在其上某点的指定一侧，等等)，我们没一一给出。它们是可以用“介于”的概念说清楚的。

9.4.1 接合公理的推论举例

定理1 两直线至多有一公共点；两平面或者没有任何公共点，或者有一公共直线而它们所有的公共点都在这直线上；平面和不在它上面的直线至多有一公共点。

第一个断语从公理 I_2 得出。第三断语从公理 I_6 得出。

我们证第二断语。设两平面 α, β 有公共点 A. 由公理 I_7 它们还有一公共点 B. 由公理 I_1 点 A, B 决定一直线 a. 由公理 I_6 直线 a 上每一点都是 α, β 的公共点. 此外，α 跟 β 不能再有不在 a 上的一个公共点 C，否则 α 跟 β 按公理 I_5 将重合于平面 ABC 了. 证完.

定理2 通过直线 a 和不在 a 上的一点，或者通过有公共点的两直线，有唯一平面.

请读者自证.

定理3 每一平面上至少有三点.

证明 设给定平面 α. 由公理 I_4, α 上有一点 A. 按 I_8, 存在不在 α 上的一点 B. 按 I_3, 有不在 AB 线上的一点 C. 平面 ABC 和 α 有了公共点 A，由 I_7 它们还有一公共点 D. 这样，α 上有了两点 A 和 D.

按公理 I_8, 存在不在平面 ABD 上的点 E. 由 I_4 有平面 ABE, 并且它与平面 ABD 不同. 又按 I_7; 平面 ABE 和 α 有一公共点 F. D 和 F 都异于 A, 又在两个互异的平面上，所以 F 不同于 D. 因此 α 上有了三个点 A, D, F. 事实上，这三个点还不共线，否则 E 就在平面 ABD 上了.

9.4.2　接合公理和顺序公理的推论举例

定理 1　*对于任意两点 A 和 C，在直线 AC 上至少有一点 D 介于 A,C 之间.*

证明　按公理 I_3，在直线 AC 外存在一点 E. 按公理 II_2，在直线 AE 上有一点 F 使 E 为线段 AF 的点. 从同一公理在直线 FC 上有一点 G 使 C 介于 F,G 之间. 由 II_3，G 不介于 F,C 之间. 于是由帕须公理 II_4，直线 EG 应与线段 AC 相交，或与线段 FC 相交. 但已证 G 不在 F,C 之间，故知直线 EG 必与线段 AC 相交于一点 D，亦即 D 介于 A, C 之间.（图 9.16 只起参考作用）

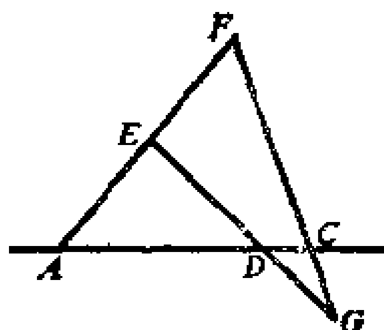


图　9.16

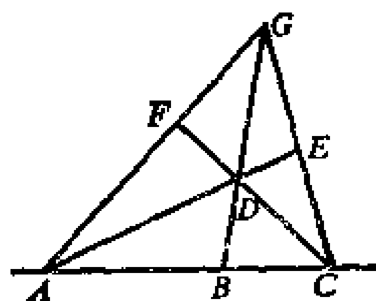


图　9.17

定理 2　*在共线三点中，必有一点介于另两点之间.*

证明　设 A,B,C 为共线的任意三点，且 A 不介于 B,C 之间，C 也不介于 A, B 之间. 让我们来证明 B 必介于 A, C 之间（图 9.17）.

从公理 I_3，有不在直线 AC 上的一点 D. 联 BD，按 II_2，直线 BD 上必有一点 G 使 D 介于 B,G 之间. 应用帕须公理 II_4 于 $\triangle BCG$ 和直线 AD，可知直线 AD 和 CG 相交于 C,G 之间的一点 E. 同理应用 II_4 于 $\triangle ABG$ 和直线 CD，则直线 CD 和 AG 相交于 A,G 之间的一点 F. 如果应用帕须公理于 $\triangle AEG$ 和直线 CF，推得 D 介于 A,E 之间. 最后，应用 II_2 于 $\triangle AEC$ 和直线 BG，得 B 介于 A,C

之间．证完．

联合公理 II_2 与定理 1，并联合公理 II_3 与定理 2，得下两定理：

定理 3 对于任意二点 A，C，必存在线段 AC 的内点(介于 A, C 间)和外点(不介于 A, C 间)．

定理 4 在共线三点中，有一点也仅有一点介于另两点之间．

现在可以给出帕须公理的一个重要的补充：

定理 5 设一直线 a 与 $\triangle ABC$ 的两边相交①，那末它就不再和第三边相交．

证明 假设相反地直线 a 跟三边 BC, CA, AB 的交点 D, E, F 都是边的内点，即它们的介于关系是 BDC, CEA, AFB．按定理4，共线三点 D, E，F 中只有一点介于另两点间，我们具体设 D 介于 E, F 间，即 EDF(图 9.18)．

应用帕须公理 II_4 于 $\triangle AEF$ 和直线 BC，因这直线已通过 EF 边的内点 D，它或者通过边 AE 的内点(意味着 C 在 A，E 之间)或者通过边 AF 的内点(意味着 B 在 A，F 之间)．而顺序关系 ACE 与假设 CEA 矛盾，顺序关系 ABF 与假设 AFB 矛盾．定理 5 得到反证．

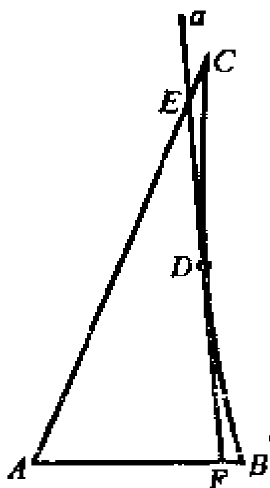


图 9.18

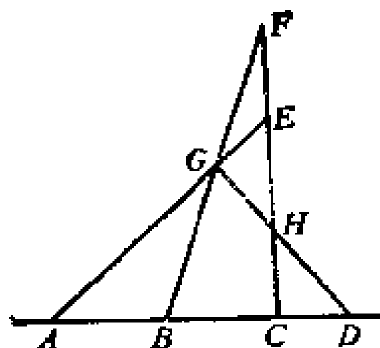


图 9.19

① 即 a 含两条边的内点．

定理 6　*设点 B 在线段 AC 上，且点 C 在线段 BD 上，则 B 和 C 都在线段 AD 上。*

证明　我们只证点 C 在线段 AD 上，B 在 AD 上的证明仿此.

据公理 I_3，取不在直线 AB 上的一点 E(图 9.19). 据 II_2，在直线 CE 上有一点 F 满足顺序关系 CEF.

应用帕须公理 II_4 于 $\triangle AEC$ 和直线 FB，由于 B 是线段 AC 的内点，直线 FB 或者与线段 AE 相交，或者与线段 CE 相交，但已知 F 不在 C, E 之间，所以直线 FB 交线段 AE 于一点 G，即有顺序 AGE.

应用 II_4 于 $\triangle FBC$ 和直线 AE，同理得顺序 BGF.

应用 II_4 于 $\triangle GBD$ 和直线 CF，推得直线 CF 与线段 DG 相交于一点 H，得顺序 DHG.

最后应用 II_4 于 $\triangle GAD$ 和直线 CH，由于 H 是线段 DG 的内点，而 E 是 AG 的外点，所以 C 是线段 AD 的内点. 证完.

象这样的证明还多得很. 发展下去，一条线段就有无穷多个外点和内点；一条直线上的点被其上一点 O 分为两类，点 O 介于异类两点之间，O 不介于同类两点之间；两类点各构成一条射线或半直线；直线上的点可以排成先后顺序.

进一步，平面上的点被其上一直线 a 分为两类，异类两点的联线段含 a 上一点，同类两点的联线段则不含 a 上的点；两类点各构成一个半平面.

原先欧几里得处理问题时借助于直观的地方，现在用周详挑选的公理得到逻辑的安排. 欧几里得被说成是给出了由图形直观地猜测到的命题以精确的证明，其实只是提供了精确画出的图的直观证明，当然逻辑起了作用. 真正的精确证明是由近代公理法提供的. 限于篇幅和学时，我们只能点缀一下.

我们开始证明时没有画图. 图形不是证明的必要部分，但是

活生生的图形直观则是抽象逻辑思维得到启发的有力工具.

9.4.3 关于合同公理和连续公理

现在该轮到引进合同公理后命题的证明,这一部分想略去了.但有一点要谈一谈,即关于运动概念的问题.

欧几里得把运动(搬动,位移)看作是直觉上显然的概念,而不是以一些公理为基础的.他把重合或叠合的图形(说得准确一些,能占空间同一位置的图形或其对称形)看作是合同或相等的.因此在欧几里得体系下,运动是基础概念(虽然缺少基础),而合同则是派生的.希尔伯特将合同作为基本概念引进,然后运动就可以作为导出的概念来定义.我们说明这个定义.

设有两个点的集合Σ和Σ'(有限的或无穷的).假设在它们的点之间建立了一一对应.集合Σ的每一对点M和N决定线段MN,设Σ'中的对应点为M'和N',我们约定把线段$M'N'$称为MN的对应线段.倘若对应线段总是互相合同的,则称集合Σ和Σ'是合同的.这时也就说,集合Σ和Σ'的一个是从另一个通过运动得来的,或说它们可以互相叠合.集合Σ和Σ'的对应点称为在运动下重合的点.

再谈谈连续公理.阿基米德公理和康托公理也是数学分析的基础.引进了连续公理,线段的测量有了定义.每一个线段跟一个实数对应,称为这线段的度量数或长度.长度、面积、体积这些概念是数学中很深刻难于理解的概念.欧氏几何中线段的大小和线段的长度是两个不同的概念.两线段比较大小是由顺序公理即介于关系确定的,而线段的长度是离不开连续公理的.平常说话大小与长短不分,这是直觉概念,不是数学概念.

在公理 I-IV 的基础上引进了关于直线、平面和空间的坐标原则.这个事实非常重要,我们可以把分析学的重要命题用到几何

学来.

象下面两个所谓圆规命题:

1° 设一直线通过圆的内部,则与此圆相交于两点;

2° 设一圆通过另一圆的内部点和外部点,则此两圆相交于两点,

欧几里得没有写出过. 对于那个时代所要求的证明的严密程度说来,不会考虑到有写出直觉上如此明显的定理的必要,而这些定理的严格证明也不是那个时代做得出的. 要证明这些定理, 要用到连续公理. 直到十九世纪, 数学家关于连续性的概念还是很模糊的.

引进平行公理 V 于公理 I-IV,就能证明:

设两平行直线被第三直线所截,则同位角相等;

三角形的内角和等于二直角;

矩形存在,正方形存在,相似形存在;

勾股定理成立;等等.

9.5　几何公理体系的三个基本问题

任何公理体系,包括初等几何公理体系,都有三个基本问题:

1° 无矛盾性问题(即和谐性问题);

2° 最少个数问题(即独立性问题);

3° 完备性问题.

第一个问题要求公理体系的各个公理以及经过一串推导得出的命题不能相互矛盾, 首先要求公理之间不相矛盾. 这显然是必要的条件.

证明公理体系的和谐性常用模型法. 公理法是抽象的, 它所考虑的对象(几何元素点、直线、平面)以及对象之间的关系或运算(几何上讲的接合、顺序、合同),都是不加定义的,但要满足公理的

要求．设给定一组公理，在某些对象间建立了确定性质的相互关系．从所采用的公理，可以对这些对象的这些性质作逻辑推理，而完全不必理睬它们其它一切可能的性质，只要公理中没有提到．

所以一个已知公理体系的对象可以是任意种类的事物，而且在公理中说到的它们之间的关系，可以有任何具体意义，只要公理的要求得到满足．

给定一组公理，具体挑选一组事物使这组公理得到满足，就说给这组公理做了一个实现或解释．实现这些公理的对象的集合，构成这公理体系的一个模型．

一个公理体系若能以某种方法用模型来实现，那末这公理体系就是和谐的．

举一个具体的例．我们给第一组公理 I_{1-8} 造一个模型．

取一个四面体，约定将它的顶点叫做“点”，棱叫做“直线”，面叫做“平面”．在这个实现里，构成几何元素的集合是四点、六直线、四平面．

正象在任何实现里一样，此刻应将接合性具体叙述出来．我们约定，跟四面体 $ABCD$ 的顶点例如 A 所代表的“点”相接合的“直线”就是含顶点 A 的棱，跟“点” A 接合的“平面”就是四面体含顶点 A 的面；跟“直线” AB 接合的“平面”就是四面体含棱 AB 的面．

容易验明，在这个模型里，公理 I_{1-8} 全部满足．

这四面体模型的存在表明八条接合公理是和谐的．

这个模型的存在，还给我们带来一个更宝贵的信息，即从第一组接合公理不能推出几何元素的个数是无穷的．因为四面体模型只有 $4+6+4=14$ 个元素却已实现了它．

初等几何公理体系的和谐性证明是相对的，即有条件的．一般的几何基础书上介绍平面几何公理 I_{1-3}，II-V 的和谐性证明时，是给出一个笛卡尔实现．结论是：

倘若实数的算术是和谐的，则公理 I-V 是和谐的。

第二个基本问题是公理的独立性问题．如果公理体系中有一个公理可从其余公理推导出来，它就不是独立的，可以把它从公理表中挪走，减少一个公理．试证第五公设的过程就是这样一个过程．但是为了简化演绎过程，有时也多列上一条公理．例如近年的中学几何课本就把三角形全等的三条定理都当作公理用．

还须注意，一种几何可以用不同的公理体系作为基础，所以去掉多余的公理(如果有的话)以后，一般说来，可以得到不同的最少个数的体系．因此，最少个数的公理体系决不是唯一的．

一组公理的独立性，虽非必要的，却是我们所期望的．设一组公理含有 n 个和谐的公理 $A_1, A_2, \cdots, A_n$．要表明其中一个 A_i 对于其余公理的独立性，办法是把它化为一个和谐性问题，即证明公理组($\bar{A}_i$ 表 A_i 的反面)

$$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, \bar{A}_i, A_{i+1}, \cdots, A_n$$

的和谐性．这是因为如果 A_i 能从 $A_1, \cdots, A_{i-1}, A_{i+1}, \cdots, A_n$ 推出，上一行的公理中就将既含 A_i 又含 $\bar{A}_i$，就不和谐了．

公理法的第三个基本问题是完备性问题．

定义 1　设一个公理体系具有两个模型 Σ 和 Σ'，如果在 Σ 和 Σ' 的对象之间能建立这样的一一对应，使得 Σ 中元素间的相互关系或命题，总跟 Σ' 中相应元素间的相互关系或命题相对应，则称这两模型是同构的。

定义 2　如果一个公理体系的各个模型是同构的，这公理体系就称为完备的．

由于希尔伯特构作的公理体系使得它有一个笛卡尔模型，它的任两模型都与笛卡尔模型同构，因而相互同构．所以公理体系 I-V 是完备的．

几何公理的三个基本问题中，和谐性是必要的，独立性和完备

性不是必要的. 正在发展中的数学分支一般不具完备性. 数学中一些公理体系正因为不具备完备性，才有各色各样的模型，显示出这公理体系的广泛应用.

*9.6 平面射影几何公理体系

这里，我们简略介绍一下平面射影几何的公理体系. 师专教学大纲没有这项内容，时间不够的话，留作读者参考.

跟 9.4 节一样，当讲到二点三线时，表示互异的二点，互异的三线.

第一组 接合公理

I_1 通过两点有一条且仅有一条直线;

I_2 两条直线通过一点且仅一点;

I_3 存在四点，其中无三点共线;

I_4（代沙格定理） 若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中对应顶点的联线AA'，BB'，CC'共点，则对应边的交点

$$P=BC\times B'C', Q=CA\times C'A', R=AB\times A'B' \text{ 共线.}$$

平面射影几何接合公理的推论

1° 欧氏平面不属于平面射影几何. 因为在欧氏平面上，公理I_1虽满足，而I_2则不一定满足.

2° 将欧氏三维空间通过一定点O的直线和平面分别理解作"点"和"直线"，而将这样的直线在这样的平面上理解作此地的点线接合关系，那末公理I_1，I_2满足，即通过点O的两条直线决定一且仅一通过O的平面，通过点O的两平面决定一且仅一通过O的直线.

我们说，通过O的直线集合跟通过O的平面集合构成一个满足平面射影几何公理I_1，I_2的模型.

3° **定理 1** 平面上至少有六条直线

证明　由公理 I_3，存在无三点共线的四点 A_1, A_2, A_3, A_4．按公理 I_1 和 I_2 存在直线

l_1: $A_2A_3B_1$,　　　　l_2: $A_3A_1B_2$,

l_3: $A_1A_2B_3$,　　　　l_4: $A_1A_4B_1$,

l_5: $A_2A_4B_2$,　　　　l_6: $A_3A_4B_3$,

其中　$B_1=A_2A_3\times A_1A_4$，等等．

这六条线是互异的，从而点 B_1, B_2, B_3 与 A_1, A_2, A_3, A_4 不同而且 B_i 与 B_j 不同．例如说，若 $B_1\equiv A_1$，则 A_1, A_2, A_3 将共线 l_1 了；若 $B_1\equiv B_2$，则 A_1, A_2, A_4 将共线了．

4° **定理 2**　每条直线上至少有三点．

证明　首先，上面构作的六直线 $l_1, l_2, \cdots, l_6$ 的每一条上至少有三点．

其次，设 l 为任一直线，若 l 不通过 A_1，那末它将与通过 A_1 的直线 l_2, l_3, l_4 相交于三点．若 l 不通过 A_2，它将交通过 A_2 的直线 l_1, l_3, l_5 于三点．若 l 既通过 A_1 又通过 A_2，则 l 即 l_3，它通过三点 A_1, A_2, B_3．这些线上至少各有了三点．

5° **定理 3**　每一点至少在三条直线上．

证明　首先，由定理 1 的构图，四点 A_1, A_2, A_3, A_4 中每一点至少在三条线上．

其次，设 P 为任一点，若 P 不在 l_1 上，将它与 l_1 上已知其存在的三点相联，得三直线 PA_2, PA_3, PB_1．仿此若 P 不在 l_2 上，则通过 P 的至少有 PA_1, PA_3, PB_2 三线．若 P 同时在 l_1 和 l_2 上，则 $P\equiv A_3$，一开始就说过，至少有三直线通过它．

6° **定理 4**　**（公理 I_4 的对偶定理）**　若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中对应边的交点

$$P=BC\times B'C',\quad Q=CA\times C'A',\quad R=AB\times A'B'$$

共线，则对应顶点的联线 AA', BB', CC' 共点．

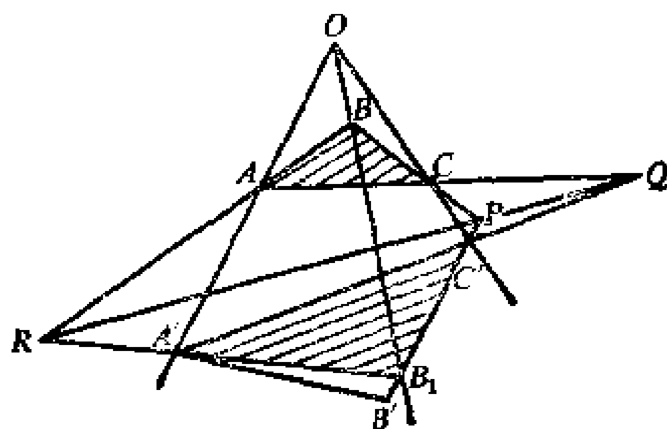


图 9.20

证明 以O表直线AA'与CC'的交点(图 9.20), 联OB交直线$PC'B'$于B_1. 要求证的乃是$B_1\equiv B'$.

证明 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B_1C'$中, 对应顶点的联线AA', BB_1, CC'共点O. 按公理I_4, 应有三点

$$BC\times B_1C'=P,\ CA\times C'A'=Q,\ AB\times A'B_1=R_1$$

共线. 但由假设, 下列三点共线:

$$BC\times B'C'=P,\ CA\times C'A'=Q,\ AB\times A'B'=R.$$

可见两点R_1, R既在PQ线上, 又在AB线上. 所以$R_1\equiv R$, 从而直线$A'B_1\equiv A'B'$.

所以$A'B_1$, $A'B'$跟直线PC'的交点B_1与B'重合. 证完.

过去我们说过, 代沙格构形的代号是$(10_3\ 10_3)$, 图上只含 10 点 10 直线. 这构形表明: 只含 10 点 10 直线的平面图形已满足了全部平面射影几何接合公理$\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_4$. 可见满足公理$\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_4$的几何元素的集合可能是有限的. 这样的有限集合对于射影平面是不够用的. 因此需要增加顺序公理.

欧氏几何的顺序公理所用的基本概念是"介于"或"在…之间."可是我们知道, 射影直线是闭合的, 如象一个圆, 其上任意一点总是介于其它二点之间的. 因此射影直线上的顺序公理不得不换一个新的基本概念. 人们用"分隔"这个名词(习题 3.14). 射

影直线上一对点 A, B 如果被另一对点 C, D 分隔，就写作 $A, B \div C, D$，如果不被分隔就写作 $A, B \doteq C, D$.

第二组 顺序公理

II_1 若 $A, B \div C, D$，则 A, B, C, D 共线而互异.

II_2 若三点 A, B, C 共线 u，则 u 上必有一点 D 使有 $A, B \div C, D$.

II_3 若 $A, B \div C, D$；则 $B, A \div C, D$ 且 $C, D \div A, B$（即两对点的分隔是相互的，地位是均等的，每一对的两个点的地位也是均等的）.

II_4 若 A, B, C、D 为共线而互异的四点，则有唯一方法将它们分成互相分隔的两对.

II_5 若 A, B, C, D, E 为 u 上五点，且 $\begin{cases} A, B \div C, D \\ A, B \div C, E \end{cases}$ 则 $A, B \doteq D, E$.

II_6 设 A, B, C, D, E 共线，若 $\begin{cases} A, B \doteq C, D \\ A, B \doteq C, E \end{cases}$，则 $A, B \doteq D, E$.

II_7 中心射影将分隔的两对点变为分隔的两对点，将不分隔的两对点变为不分隔的两对点.

通过中心射影和截影，点列和线束可以互相转换，通过公理 II_7，可以在线束的两对直线间建立分隔或不分隔的概念，关于它们有类似 II_1—II_7 的公理. 我们把点偶的分隔看作基本概念来承认，而把线偶的分隔看作由前者派生的.

这里叙述的顺序公理，并不建筑在公理个数最小的基础上，而是建筑在使用比较方便的观点上.

从公理 II_4 立刻得出：

定理 5 若 $A, B \div C, D$，则 $\begin{cases} A, C \doteq B, D \\ A, D \doteq B, C \end{cases}$.

从顺序公理(象初等几何公理法一样)经过艰苦的推导，可得出一系列的命题，以建立直线上点的先后顺序．并且，在初等几何里帕须公理是当作基本概念承认的，而在射影几何里却可当作定理证明出来(参考裘光明译，叶菲莫夫著《高等几何学》下册 § 89).

有一个直观上很明显，理论上可以证明的事实，我们提一下:

在欧氏直线上，两点 A, B 决定一个线段，介于这两点间的点构成线段 AB 的内部．在射影直线上，两点 A，B 决定两个线段(如同圆周上两点定出一个优弧和一个劣弧)．在同一线段上任取两点所组成的点偶必不分隔 A, B，在不同线段上任取两点所组成的点偶必分隔 A, B.

第三组 连续公理

从接合公理和顺序公理推出直线上有无穷多个点，它们构成的集合跟有理数集合成一一对应．由这些点不能构成连续直线．为此，引进连续公理:

设直线上两点 A，B 将直线分为两个线段，我们取定其中一个．将这一线段上的所有点分作两类，A 属第一类，B 属第二类．以 X 表第一类中 A 以外的任一点，以 Y 表第二类中 B 以外的任一点．若对于任意一对点 X 与 Y 总有

$$A, Y \div X, B,$$

则所取线段上必有一点 C (或属第一类，或属第二类)存在，使得对于 C 以外的任一对点 X 和 Y，总有

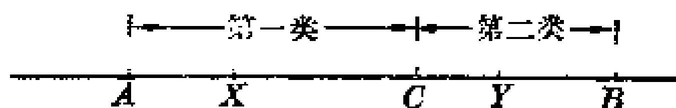


图 9.21

$$A, C \div X, Y; C, B \div X, Y.$$

直线上的点集合的连续性，通过中心射影转变为一个线束中

的直线集合的连续性.

回顾对偶原理

在2.3节最初总结出对偶原理时，我们凭藉的是同一套代数运算可给以两种观点的解释，点几何的和线几何的.

在6.5节引进配极对应以后，将一个射影图形对于一个二次曲线作配极变换，对偶原理得到新的解释.

此地介绍了平面射影几何公理法，接合公理及其推论，表明公理 I_1-I_4 的对偶命题全部成立. 顺序公理和连续公理又都可以转移到线束，因此也是对偶的.

因此对于建立在三组公理基础上的平面射影几何，对偶原理成立. 这是对偶原理的根本依据.

*9.7 罗巴切夫斯基几何

两千多年试证欧几里得第五公设没有成功，在某种意义上说带来相反的结果. 几个优秀的数学家罗巴切夫斯基，J.波里埃和高斯三人彼此独立地发展了一种新几何，即罗巴切夫斯基几何.

欧氏几何与罗氏几何的公共部分是*绝对几何*. 罗巴切夫斯基几何的公理表是

$$I_{1-8},\ II_{1-4},\ III_{1-5},\ IV_{1-2},\ V',$$

其中 V' 是:

V′(罗巴切夫斯基平行公理) *通过不在直线 a 上的点 A，至少有两条直线在 a 与 A 的平面上而与 a 不相交.*

由罗氏公理 V' 出发，在所考虑的平面上，通过 A 应有无数条直线与 a 不相交.

事实上，设 a_1、a_2 是通过点 A 跟 a 不相交的两条直线(图9.22). 在直线 a_2 上取一点 B_2 使其与直线 a 位于直线 a_1 的异侧. 联 B_2与 a 上的一点 B，则直线 a_1 两侧的点 B 和 B_2 的联线段必交

a_1 于一点 B_1. 以M表示线段 B_1B_2 上任一点，那末射线 AM 与 a 必不相交. 因为若它们有一公共点C，考察$\triangle MBC$ 和直线 a_1，因 B_1 介于 B，M之间，而 A 不介于M，C之间，公理 II_4 于是要求直线 a_1 与线段 BC 相交. 即 a_1 与 a 相交，这是矛盾. 仿此若设反向射线MA 与 a 有一公共点 C'，则得出 a_2与 a 相交的矛盾.

定理 I 平面上通过一直线外的任一点，有无穷多条直线跟该直线不相交.

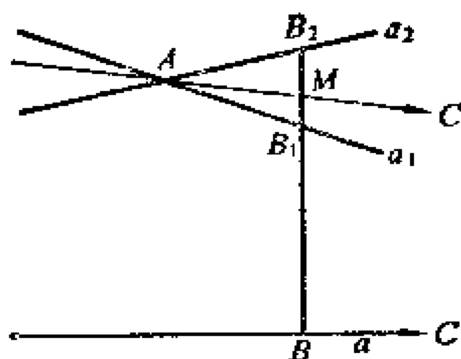


图 9.22

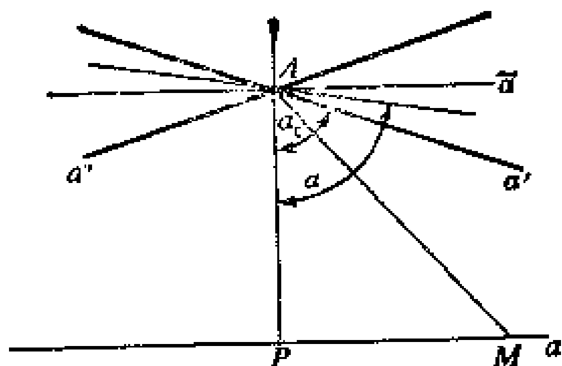


图 9.23

*9.7.1 罗巴切夫斯基平行线定义

欧几里得的平行线是共面而不相交的直线. 罗巴切夫斯基的平行线定义比这复杂得多.

仍设 a 为一直线，A 为其外一点. 设 $AP\perp a$，P 表垂足。直线 AP 将平面分为两部分，我们约定称之为“右”半平面和“左”半平面. 仿此，直线 a 分平面成两部分，A 所在的称之为“上”半平面(图 9.23).

用 $\bar{a}$ 表示 AP 在点 A 的垂线，由绝对几何知道两直线 $\bar{a}$ 跟 a 不相交. 据罗氏公理，除 $\bar{a}$ 外有无穷多直线通过 A 而跟 a 不相交. 这些跟 a 不相交的直线中的任一条的右半线与半线 AP 的夹角用变数 α 表示，α 是连续的有界变量，以 α_0 表示变量 α 的下确界（最大下界）. 于是有

$$0<\alpha_0<\pi/2.$$

这是因为，以M表P右方在a上的一个邻点，则$\alpha_0>\angle PAM>0$；又因$\bar{a}$不是跟a不相交的唯一直线，所以$\alpha_0<\pi/2$.

通过A引直线a'，使其右半线跟AP所成的角等于α_0，则直线a'与a不相交。事实上，若a'与a相交，交点只能落在右半平面上；以R表其交点，在a上R的右侧必有一点R'，以α'表$\angle PAR'$，则有$\alpha_0<\alpha'$．于是α的下确界不小于α'因而大于α_0了，这与α_0的定义矛盾.

用a''表通过A并跟a'关于AP成对称的直线，a''跟a'一样是不与直线a相交的.

直线a'和a''组成两对对顶角．通过A而落于P所在的那一对对顶角内的每一直线都与a相交，而落于另外一对对顶角内的每一直线都不和a相交．至于a'，a''，已证明它们属于跟a不相交的一类，而且是这些直线的界限直线.

a'和a''分别称为通过点A而与直线a平行的右平行线和左平行线．也写作$a' /\!/ a, a'' /\!/ a$。因此有

定理 2 在罗氏平面上，给了一直线a及不在其上的一点A，则有两直线与a平行.

可能认为直线a'对于点A讲是a的右平行线，对于a'上另外一点就不然了．实则不然．我们有

定理 3 设直线$a' /\!/ a$，则此性质与定义中点A的选择无关.

我们复制图 9.23，在a'上任取一点$\bar{A}$在A的右侧，作$\bar{A}\bar{P}\perp a$，我们来证明，从$\bar{A}$发出的射线$\bar{a}'$只要在$\bar{A}\bar{P}$之右和a'之下，就都和直线a相交(图 9.24)．事实上，在$\bar{a}'$上任取一点Q(无需考虑下半平面的点)，引射线AQ．由定义，关于点A，a'是a的右平行线，射线AQ既在AP之右又在a'之下，便应与a相交于一点M．考察$\triangle APM$和$\bar{a}'$所在的直线，这直线跟线段AM交于Q，跟线段

AP 不可能有公共点，所以射线 $\bar{a}'$ 一定跟线段 PM 亦即跟直线 a 相交. 这就是所要证明的.

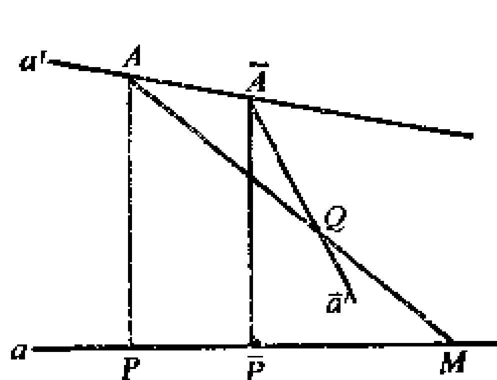


图 9.24

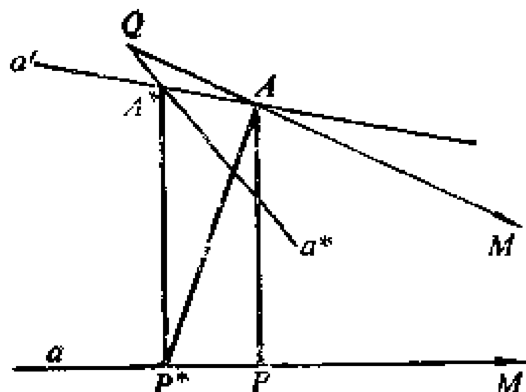


图 9.25

再讨论直线 a' 上点 A 左侧任一点 A^*(图 9.25). 引 $A^*P^*\perp a$. 设 a^*是从 A^*发出的射线，位于 A^*P^*之右以及 a' 之下. 要证明 a^* 与 a 相交. 在补足 a^*成直线的射线上任取一点 Q，Q 在 a' 上侧半平面上. 联 QA 直线. 由假设，直线 a' 是通过 A 而不与 a 相交的直线集合的界限，所以直线 QA 必交 a 于一点 M 在 P 之右. 注意射线 a^*通过$\angle AA^*P^*$的顶点 A^*且画在这角的内部，可知 a^*跟线段 AP^*相交. 直线 a^*与射线 AM 的交点 Q 在 a' 上侧. 应用帕须公理 II_4 于$\triangle AP^*M$和射线 a^*，得出 a^* 必与线段 P^*M 相交从而必与直线 a 相交.

上面对于右平行线的证法，也适用于左平行线。证完。

依照罗巴切夫斯基几何，直线 a' 如果是通过其上某点而与直线 a 不相交的直线集合的界限直线，则 a' 称为直线 a 的平行线.

*9.7.2 平行线的相互性(对称性)

我们先证明罗氏几何的一个重要定理

定理 4 任何三角形的内角和小于两直角.

证明 由 9.2.3 节定理II，在绝对几何中，三角形的内角和是

$S(\triangle)\leqslant\pi$；又定理I证明，若 $S(\triangle)=\pi$ 则第五公设亦即公理V成立。而在罗氏几何适用公理V′，所以 $S(\triangle)<\pi$.

定理 5　设直线 a 在指定的方向平行于直线 b，则 b 也在同一方向平行于 a（图 9.26）.

图　9.26

证明　设 b 上由点 A 到 B 以及 a 上由 C 到 D 的方向就是所指定的方向. 联 AC，要证 b 平行于 a，由于 b 是通过 A 而跟 a 不相交的一条直线，倘若能证明在 $\angle BAC$ 内部任引一射线 AE 都跟 a 相交，那 b 就是不相交线的界限，即 b 平行于 a 了.

为此，作 $AP\perp a$，在 a 上点 P 的两侧各取一点 F 和 G 使 $FP=PG$，联 AF，AG 所得 $\triangle AFG$ 是等腰三角形，且要求 F，G 充分靠近 P 使有

$$\angle FAG=2\alpha<\angle BAE.$$

记 $\angle AFG=\angle AGF=\beta$. 由外角定理，$\angle AGD>\angle AFG=\beta$. 因此可以在 $\angle AGD$ 内部引射线 GH 使 $\angle AGH=\beta$，由于 $a\parallel b$，这射线必交 b 于一点 H. 在 a 上截 $FI=GH$，联 AI. 于是 $\triangle AGH$ 跟 $\triangle AFI$ 有两边及其夹角对应相等，所以 $\triangle AFI\cong\triangle AGH$，从而 $\angle FAI=\angle GAH$. 从 $\angle BAF$ 分别减去此式两端得

$$\angle BAI=2\alpha<\angle BAE.$$

可知射线 AE 落在 $\angle CAI$ 内部，从而射线 AE 应与线段 CI 相交即与直线 a 相交. 证完，即若 $a\parallel b$，则 $b\parallel a$.

*9.7.3 平行线的传递性

定理 6 设直线 a 和 b 在同一方向与直线 c 平行，则它们在此方向互相平行.（若 $a \parallel c, b \parallel c$，则 $a \parallel b$）

证明 首先，a 和 b 不能相交，否则从它们的交点将有两直线在同一方向与 c 平行了.

为了证明 $a \parallel b$，区分两种情况：

1° 设直线 a 和 b 在直线 c 同侧，例如设 b 介于 a 和 c 之间（图 9.27）.

在 a 上任取一点 A，并用 $\bar{a}$ 表示 a 由 A 指向平行方向的射线. 要证明 $\bar{a}$ 是通过 A 而不跟 b 相交的射线集合的界限. 为此，由 A 引射线 $\bar{a}'$ 在 b 的平行方向一侧（也是 c 的平行方向一侧）与 $\bar{a}$ 夹任意小角 θ. 由于 $\bar{a}$ 是通过 A 与 c 不相交的射线的界限，$\bar{a}'$ 必与 c 相交. 因 A 与 c 在 b 的异侧，所以 $\bar{a}'$ 也必与 b 相交。所以 $\bar{a}$ 也是通过 A 而与 b 不相交的射线的界限，即 $a \parallel b$.

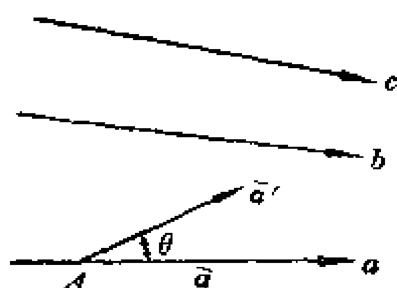


图 9.27

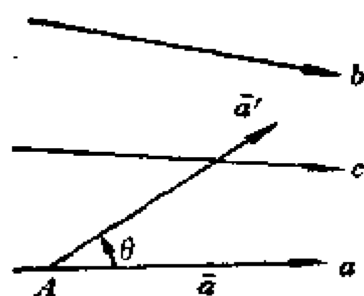


图 9.28

2° 设直线 a 和 b 在 c 的异侧.

从 a 上任一点 A 向平行的一侧引射线 $\bar{a}'$（图 9.28），使其与 $\bar{a}$ 夹一任意小角 θ. 由于 $a \parallel c$，所以 $\bar{a}'$ 应与 c 相交. 又因 $c \parallel b$，$\bar{a}'$ 也应与 b 相交. 可见从 A 出发而不跟 b 相交的射线集合以 $\bar{a}$ 为界限，即 $a \parallel b$. 证完.

到此可知，尽管罗氏平行线比欧氏的复杂，但在指定方向与一

已知直线平行的直线集合，还具有欧氏平行线集合同样的性质。

*9.7.4 分散直线

罗氏平面上既不相交又不平行的两直线称为分散直线。在平面上通过直线 a 外一点 A，有两条直线 a'，a'' 与 a 平行，有无穷多条与 a 相交，有无穷多条与 a 分散。这两个无穷多条以 a' 和 a'，为分界线。

定理 7 同垂直于一直线的两条共面直线是分散的。

证明 设两直线 a，b 在点 A，B 与直线 c 垂直，则从绝对几何命题 a 与 b 不相交；但它们也不平行，因为通过 A 而与 b 不相交的直线集合不以 a 为界限。所以 a 和 b 是分散直线。

定理 8 设平面上两直线被第三直线所截，组成相等的同位角或错角，则它们是分散的。

证明 这是前一定理的推广，也可从前一定理引出。

用 a 和 b 表示两已知线，c 表截线，与 a，b 交于点 A，B。以 O 表线段 AB 的中点，并作 $OP\perp a$，$OQ\perp b$（图 9.29）。容易看出两直角三角形 OAP 和 OBQ 合同，因而 $\angle AOP=\angle BOQ$，于是 POQ 构成一条线段，构成垂直于 a 和 b 的线段。所以按定理 7，a 和 b 是分散直线。证完。

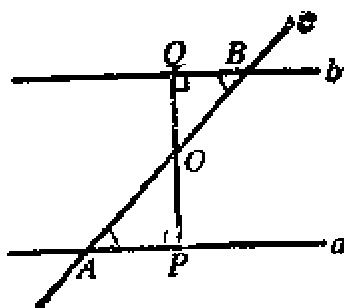


图 9.29

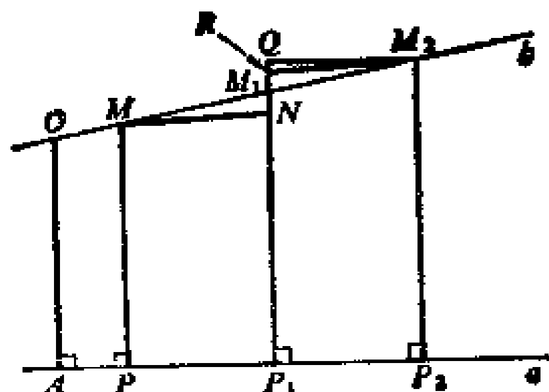


图 9.30

现在我们来证明

定理 9 任意两条分散直线必有唯一的公垂线。因此，唯一

公垂线的存在，成了两直线是分散的充要条件.

首先，在罗氏平面上倘已有一公垂线，就不会再有一条. 事实上，如果 AB 和 CD 都垂直于 AC 和 BD，则 $ABDC$ 的内角和等于四直角，这是不可能的，因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的内角和都小于二直角.

为了证明公垂线存在，先证一个引理：

引理 设 a，b 为任两直线，O 为 b 上一点，OA 是 a 的垂线，且设 M 在 b 上移动时，总使 $\angle AOM$ 为钝角（图 9.30）. 以 x 表距离 OM，以 $f(x)$ 表 M 到 a 的距离 PM. 求证 $f(x)$ 是连续无界的单增函数.

证明 在直线 b 上取两点 M 及 M_1. 设

$$x=OM<OM_1=x_1,$$

MP，M_1P_1 是 a 的垂线，

$$y=PM,\quad y_1=P_1M_1.$$

由罗氏平行公理推得四角形 $OAPM$ 的内角和 $<2\pi$. 于是

$$\angle AOM+\angle OMP<\pi,\quad \angle OMP+\angle PMM_1=\pi.$$

从此可知 $\angle PMM_1>\angle AOM$. 可见当点 M 在钝角一侧向前移动时，钝角愈来愈大.

在 P_1M_1 上截取 $P_1N=PM$，联 MN，在萨开里四角形 MPP_1N 中上底角 $\angle PMN=\angle P_1NM$ 是锐角，$\angle PMM_1$ 是钝角，那末点 N 介于 P_1，M_1 之间，因之 $P_1M_1>PM$. 可见当 $x_1>x$ 便有 $f(x_1)>f(x)$，这样函数 $f(x)$ 的单增性证明了.

现在置 $\Delta x=x_1-x=MM_1$，$\Delta y=y_1-y=NM_1$ $(\Delta x>0, \Delta y>0)$. 从不等式

$$NM_1<NM+MM_1$$

以及 $NM<MM_1$（在 $\triangle NMM_1$ 中，一边对锐角，一边对钝角），得

$$NM_1<2MM_1\quad 即\quad \Delta y<2\Delta x.$$

仿此，当 $\Delta x<0$ 时，有 $|\Delta y|<2|\Delta x|$.

总之，当 $\Delta x\to 0$ 时也有 $\Delta y\to 0$，$f(x)$ 的连续性得证.

还要证明当 x 无界增大时，$f(x)$ 也无界增大. 为此，在 b 上取点 M_2 使 $M_1M_2=MM_1$，并作 $M_2P_2\perp a$，记 $x_2=OM_2$，$y_2=f(x_2)=P_2M_2$，$h_1=y_1-y$，$h_2=y_2-y_1$. 于是

$$(1)\qquad PM=y,\quad P_1M_1=y+h_1,\quad P_2M_2=y+h_1+h_2.$$

在射线 P_1M_1 上截取 $P_1Q=P_2M_2$，$M_1R=NM_1$. 则 $\triangle M_1MN$ 跟 $\triangle M_1M_2R$ 因两边及夹角对应相等而合同. 因之 $\angle M_1RM_2=\angle M_1NM$. 但 $\angle M_1NM$ 是萨开里四角形中锐角 $\angle MNP_1$ 的补角，因之跟它相等的角 $\angle M_1RM_2$ 是钝角. 又 $\angle M_1QM_2$ 是萨开里四角形的上底角，即是锐角. 比较 $\angle M_1RM_2$ 跟 $\angle M_1QM_2$ 的大小，由外角定理断定 R 介于 M_1 和 Q 之间，即 $M_1Q>M_1R$，或 $h_2>h_1$.

于是从(1)式得 $P_2M_2=f(x)+h_1+h_2>f(x)+2h_1$. 仿此推得

$$f(x_0+ns)=P_nM_n>f(x_0)+nh_1\quad(s=MM_1,\ x_0=OM).$$

此式表明 $f(x)$ 随 x 无界地增长. 引理证完.

注意：推理过程中虽用过罗氏公理，这引理却属于绝对几何. 在欧氏平面上，显然有

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_0+s)=y_0+h_1,\ \cdots,\ f(x_0+ns)=f(x_0)+nh_1.$$

现在回到定理 9 的证明. 证明两分散直线必有一公垂线.

设 a，b 为两分散直线，MN 是从 b 上一点 M 引向 a 的垂线(图 9.31). 若 MN 也垂直于 b，则证明已毕. 因此设 MN 不垂直于 b，而且在 b 上标明正方向使与 MN 组成钝角. 由引理，当 M 向正方向变动时，距离 MN 是无界地连续单增的.

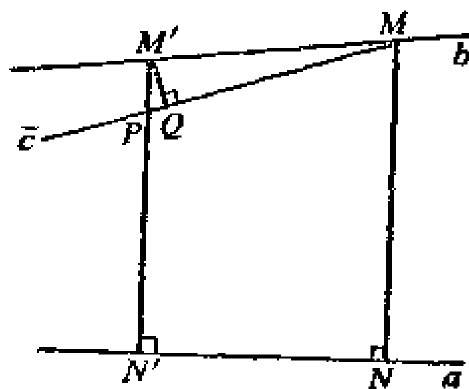


图 9.31

我们来证明，从某一瞬间开始，对于向负方向变动的点，也存在这种情况.

直线MN分平面为正向半平面和负向半平面. 在负向半平面上，由点M引射线$\bar{c} \parallel a$. 由于a和b是分散的，射线$\bar{c}$比直线b的负射线更接近于a. 因此，设M'为b的负射线上一点，并引$M'N' \perp a$，则$M'N'$与射线$\bar{c}$的交点P落在线段$M'N'$上，即$M'N' > M'P$，若引$M'Q \perp \bar{c}$，显然有$M'P > M'Q$. 所以$M'N' > M'Q$. 但按引理，当点M'离开角顶M无限远去时，垂线$M'Q$是连续无界地单增的. 因此$M'N'$也将连续无界地单增.

在直线b上取一个坐标原点，并取b的正向为坐标正向. 用x表动点M的坐标，用$f(x)$表垂线MN的长度. 由推证引理过程，$f(x)$是恒为正的连续函数，并且当x趋于$+\infty$或$-\infty$时，$f(x)$无界地增大. 由此可知：第一，$f(x)$有正的极小值$f(x_0)$；第二，对于大于$f(x_0)$的每个值，函数$f(x)$至少对于两个不同的x值取此值：$f(x_1)=f(x_2)$. 用M_1, M_2表相应的两点，用M_1N_1和M_2N_2表引向a的垂线. 于是$M_1N_1N_2M_2$是萨开里四角形. 由9.2.2节定理1，这萨开里四角形上下两底中点的联线垂直于a和b. 两分散直线a, b公垂线的存在证明了. 我们还看到两条分散直线在其公垂线的两侧无限地远离.

我们顺便提一下，两分散直线a, b之一上的各点在另一线上的(正)射影只能填满第二线的有限线段. 设AB是它们的唯一公垂线. 从点B引a的平行线c_1和c_2(图 9.32)，并在直线b上各点引b的垂线，按 9.3 节第五公设的第七个等价命题(这是9.2.3节定理 III 证明过程启示的)，要这些垂线总和c_1或c_2相交，就必须采用欧几里得第五公设. 因此在罗氏平面上，直线b上离开点B充分远的点处的垂线，便不跟射线c_1和c_2相交. 以r表示这些不相交垂线到点B的距离的下确界，并在b上标出两点C_1和C_2使满

足$C_2B=BC_1=r$. 那末,明显地,直线a上所有各点在b上的射影只能落在线段C_1C_2内部.

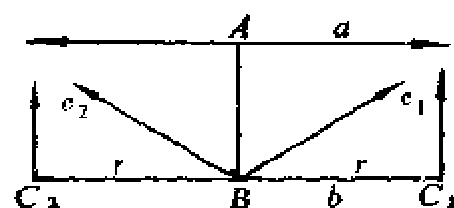
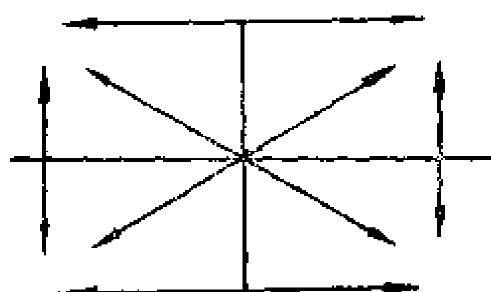


图 9.32


图 9.33

从下面9.7.6节的证明,在点C_1和C_2所作b的垂线分别平行于c_1和c_2,按平行线的传递性因而也就平行于a.

倘若作出图9.32关于直线b的对称形,就得到图形9.33,这是欧氏几何中没有的特殊"四边形",它的边和对角线在箭头的方向相互平行.

*9.7.5 两平行线的相关位置

定理10 从两平行线之一上的动点到另一线的距离,当动点向平行方向变动时趋向于零,而当动点向反对方向变动时则无界地增大.

证明 设直线$a \parallel b$,以M表a上动点,而$MN \perp b$(图9.34).在

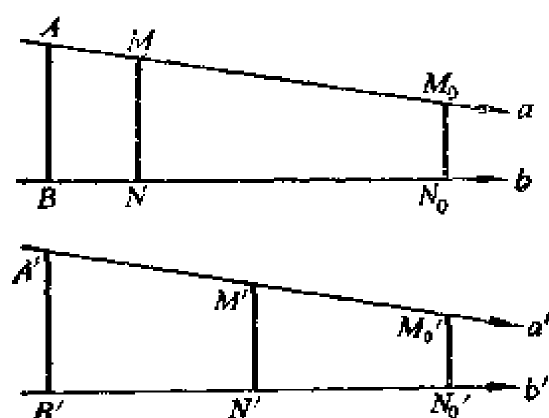


图9.34

平行的一侧，线段MN与a组成锐角. 由定理9的引理，当M沿平行的反向移动时，MN的长度无界地单增，而当M沿平行方向移动时，则MN单减.

我们来证明后者，即MN单减以趋于零为限.

在直线a上取一点A，引$AB\perp b$. 要证明任给了正数ε，不论多小，总有M的一个位置存在满足$MN<\varepsilon$. 若$AB>\varepsilon$，则于平面上取一直线b'，并于其上取一点N'_0作垂线，且截$N'_0M'_0<\varepsilon$. 从点M'_0引直线a'平行于b'. 我们让一动点M'在a'上沿平行的反向移动，则点M'到直线b'的距离$M'N'$连续而无界地单增，则M'一定有这样一个位置使$M'N'$的长度等于AB. 以A'和B'表这一瞬间的M'和N'. 将直线a'和b'组成的图形挪动，以使b'重合于b且B'重合于B，而且使a'与b'的平行方向跟a与b平行的方向一致. 由于$A'B'=AB$，点A'重合于A. 又由于通过一点只能引一直线在指定方向与已知直线平行，所以直线a'重合于a. 设点M'_0这时的位置是M_0，而N'_0的相应位置为N_0，则垂线M_0N_0的长度就小于预先给定的ε. 证完.

简单地总结一下，平面上两直线有三种相关位置，或相交，或分散，或平行. 两分散直线的特征是它们有唯一公垂线，这是它们间的最短距离，在公垂线两侧这两线逐渐无界地远离. 至于两平行直线，则在一个方向无限地接近，而在相反的方向无界地远离.

*9.7.6 罗巴切夫斯基函数$\pi(x)$

平面上设有直线a及其外一点A，引$AP\perp a$. 通过A引两直线u_1及u_2在两个方向平行于a，则AP和u_1所形成的锐角等于AP和u_2所形成的锐角. 这锐角称为点A对于直线a的平行角. AP称为平行距.

定理11 平行角由平行距所完全决定.

证明 设点A到直线a的距离AP等于点A'到直线a'的距离$A'P'$，以α，α'分别表两者的平行角(图 9.35)．因此只要求证明$\alpha=\alpha'$．

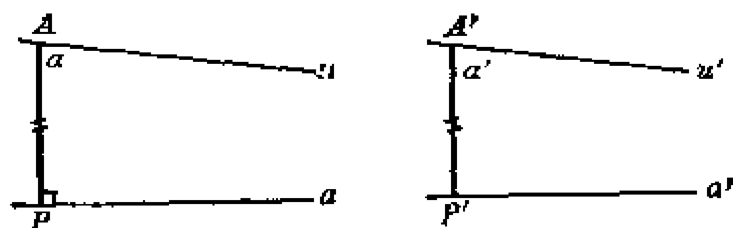


图9.35

以u,u'分别表通过点A,A'而跟直线a，a'右平行的直线．若定理的反面成立，例如设$\alpha<\alpha'$．通过点A'引直线u''使在$A'P'$右侧与$A'P'$的夹角等于α．由于$u'\parallel a'$，u''应在右侧与a'交于一点Q'．在a上点P右侧截线段$PQ=P'Q'$，则$\triangle APQ$跟$\triangle A'P'Q'$因两边及其夹角分别相等而合同．于是$\angle PAQ=\alpha$，因而直线u应与直线AQ重合，u就不是a的平行线了．定理得到反证．

以x表平行距，以α表平行角．证明了α是x的函数，引用罗巴切夫斯基的符号写为$\alpha=\pi(x)$．这函数在非欧几何占基本地位．我们来研究它的一些最简单的性质．

1° $\pi(x)$是x的单减函数：

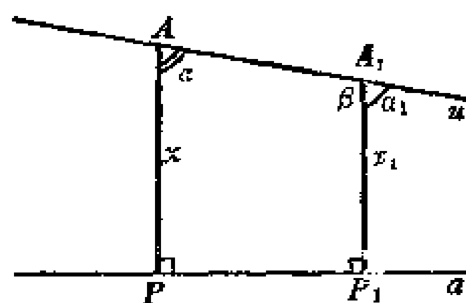


图9.36

设u是a的右平行线，A, A_1是u上两点，A_1在A之右(图9.36)．由 9.7.1 节定理 3，平行性与点A或A_1的选取无关．设$AP=x$，$A_1P_1=x_1$是点A, A_1的平行距，α, α_1是相应的平行角．由9.7.4节引理，$x_1<x$．又因四角形APP_1A_1的内角和小于二直角，故有(记$\beta=\angle AA_1P_1$)

$$\alpha+\beta<2d=\alpha_1+\beta,\text{ 即 }\alpha_1>\alpha.$$

由 $x_1 < x$，而 $\pi(x_1) > \pi(x)$，表明 $\pi(x)$ 是单减函数.

2° $\pi(x)$ 取 0 与 $\pi/2$ 间的一切值：意思是说，任给了一锐角 α，它一定是某一线段 x 的平行角. 以 O 表角 α 的顶点，a 和 b 是它的边. 在罗氏平面上，射线 a 上离开点 O 充分远处的垂直线便不再和射线 b 相交，否则欧氏第五公设成立.

设 M 是射线 a 上任一点，在这样的点 M 所引 a 的垂线不跟射线 b 相交. 这样的点 M 有下界，因而有最大下界. 以 M_0 表最大下界，或者说让 $x = OM_0$ 是距离 OM 的最大下界；以 b_0 表 a 在 M_0 的垂线. 我们来证明 $b_0 /\!/ b$.

为此，首先要能断定 b_0 和 b 不相交. 用反证法，设 b_0 与 b 交于一点 N_0（图 9.37 左），在 b 上取一点 N_1 使 N_0 介于点 O 与 N_1 之间，并作 $N_1M_1 \perp a$，记 $\varepsilon = M_0M_1$. 既然在 M_1 处的垂线是跟 b 相交的，可见 $OM > OM_1 = x + \varepsilon$. 这样一来，$OM$ 的最大下界将 $\geqslant x + \varepsilon > x$，这跟 x 是 OM 的最大下界的定义矛盾. 所以证明了 b_0 跟 b 不相交.

还要证明：通过 M_0 且跟 b 不相交的直线集合里，b_0 是界限直线. 设 $\bar{b}$ 是通过点 M_0 的任意射线，但与 O 在 b_0 的同侧且与锐角 α 在 a 的同侧（图 9.37 右）. 在 $\bar{b}$ 上取一点 $\bar{P}$ 使位于角 α 内部，并引 $\bar{P}\bar{M} \perp a$. 明显地垂足 $\bar{M}$ 在 O 和 M_0 之间. 因此垂线 $\bar{P}\bar{M}$ 与射线 b 交于一点 $\bar{N}$. 由于射线 $\bar{b}$ 与 $\triangle O\bar{M}\bar{N}$ 的边 $\bar{M}\bar{N}$ 相交而与边 $O\bar{M}$ 不相交，所以由帕须公理，射线 $\bar{b}$ 一定和射线 b 相交. 证明了 b_0 确是界限线.

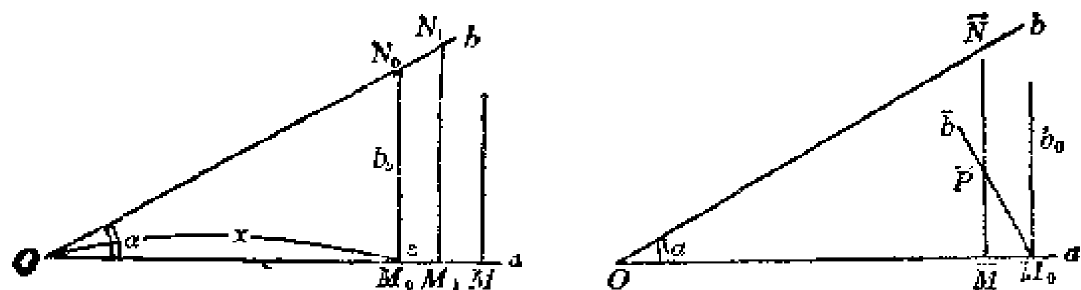


图9.37

所以证明了$b_0 \parallel b$. 即是说，给了锐角α就一定有线段$OM_0=x$，使$\alpha=\pi(x)$. 证明了$\pi(x)$确实取$(0,\pi/2)$内的一切值.

3° 函数$\pi(x)$是连续的：

设　$\alpha_1=\pi(x_1)$，$\alpha_2=\alpha_1-\varepsilon>0$，$\alpha_3=\alpha_1+\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，$\varepsilon>0$.

由上面的证明有x_2和x_3满足$\pi(x_2)=\alpha_2$，$\pi(x_3)=\alpha_3$. 取

$$\delta=\min(x_1-x_3, x_2-x_1),$$

则由$\pi(x)$的单调性，当$|x-x_1|<\delta$时，便有

$$|\pi(x)-\pi(x_1)|<\varepsilon.$$

所以$\pi(x)$在$(0,\infty)$是连续函数.

4° $\lim\limits_{x\to\infty}\pi(x)=0$：

给定$\varepsilon>0$，由上面的证明有正数G使$\pi(G)=\varepsilon$. 于是由单减性，当$x>G$时，便有　$\pi(x)<\pi(G)=\varepsilon$. 所以

$$\lim_{x\to\infty}\pi(x)=0.$$

5° $\lim\limits_{x\to 0}\pi(x)=\pi/2$：

当$x\to 0+$时，连续函数$\pi(x)$单调增大但又有上界$\pi/2$. 所以当$x\to 0+$时，$\pi(x)$必有一极限$\alpha_1\leqslant\pi/2$.

若$\alpha_1<\pi/2$，则由于$\pi(x)$的单调性，$\pi(x)$就不能取介于α_1与$\pi/2$之间的锐角值了，跟上面证明的结果矛盾. 所以

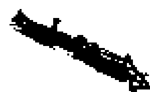
$$\lim_{x\to 0}\pi(x)=\pi/2.$$

总结以上所述得

定理12　一点对于一直线的平行角α是这点到该直线的距离x的函数：$\alpha=\pi(x)$. 这函数是连续的单减函数，且有

$$\lim_{x\to 0}\pi(x)=\pi/2, \lim_{x\to\infty}\pi(x)=0.$$

从　$\lim\limits_{x\to 0}\pi(x)=\pi/2$可以知道，对于微小的$x$，平行角接近于直角. 因而在空间的小范围内，罗氏几何跟欧氏几何的差异相对



地微小. 证完.

这些性质从函数 $\pi(x)=2\operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{x}{\rho}}$ 的表达式(参考钱端壮《几何基础》p.255)是一目了然的. 这里 ρ 是一个正的常数, 它的选择等于是尺度的选择.

习　　题

9.1　证明三角形内角和为常数这一命题与第五公设等价.

9.2　证明有不合同的两个相似三角形存在这一命题与第五公设等价.

9.3　证明不通过 $\triangle ABC$ 任一顶点的平面若与线段 AB 相交, 则必与线段 AC 或 BC 相交.

9.4　设点 C 在线段 AD 上, 且点 B 在线段 AC 上, 证明 B 在线段 AD 上, C 在线段 BD 上.

9.5　设点 C 和 D 都介于 A 和 B 之间, 则 C, D 间的任一点 M 必在 A, B 之间.

9.6　用公理证明: 设在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中有

$$AB=A'B',\qquad AC=A'C',\ \angle A=\angle A',$$

则

$$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'.$$

9.7　用公理证明: 设在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中有

$$AB=A'B',\ \angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',$$

则

$$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'.$$

9.8　用公理证明: 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中有三边依次相等, 则必合同.

9.9　证明圆内接正六边形的边长等于圆半径这一命题与第五公设等价.

9.10　若一直线通过一圆的一个内点, 则必与此圆相交于两点.

*9.11　证明在罗氏几何中, 三角形的内角和不是定常数.

*9.12　证明在罗氏几何中, 半圆的内接角小于直角.

*9.13　在罗氏平面上设 O 为 $\triangle ABC$ 两角 B 和 C 的平分线的交点, $OD\perp BC$, D 为垂足; 过 O 跟 OD 垂直的直线分别交 AB, AC 于 E, F. 证明 $EF<BE+CF$.

*9.14 在罗氏平面上以一直线截两平行线，证明在平行方向的同侧内角和小于二直角。

*9.15 在平面上直线 a 的同侧引两直线 b, c 在不同的方向平行于 a，那末 b 与 c 总相交吗？

*9.16 证明三角形两边中点的联线跟第三边是分散直线。

*9.17 在罗氏平面上从直线外一点到直线上三点联成三线段，证明它们的中点不共线。

*9.18 证明三角形两边中点的联线段等于第三边的一半这一命题跟第五公设等价。

*9.19 证明罗氏平面上任意两对平行线总可以叠合。

*9.20 证明两个萨开里四角形如果有相等的锐角以及相等的上(或下)底边，就是合同图形。

参 考 资 料

1. 孙泽瀛编《近世几何学》 高等教育出版社

2. 东北师大几何教研室译，H. Ф. 切特维鲁新著《射影几何学》上、下 高等教育出版社

3. 裘光明译，H. B. 叶菲莫夫著《高等几何学》上、下 高等教育出版社

4. 钱端壮著《几何基础》 高等教育出版社

5. 苏步青译，B. И. 科士青著《几何学基础》 商务印书馆

6. M. 克来因著《古今数学思想》1—4 册 上海科学技术出版社

7. A. Д. 亚历山大洛夫著《几何学》 数学通报1955, 4-5

8. R. Garnier, «Leçons d'algèbre et de géométrie»上，中，1935-6

9. W. C. Graustein, «Introduction to higher geometry», 1930

10. O. Veblen and J. W. Young, «Projective geometry», 卷一, 1916

11. H. S. M. Coxeter, «Projective geometry»1964

12. H. Levey, «Projective and related geometries», 1964

13. H. B Griffiths and P. J. Hilton, «A comprehensive textbook of classical mathematics», 1970